



MỚI

# GIẢI BÀI TẬP TOÁN 8★

ĐẦY ĐỦ - RÕ RÀNG - DỄ HIỂU



DO NOT COPY



# MỤC LỤC

## Chương I – Phép nhân và phép chia các đa thức

Bài 1. Nhân đơn thức với đa thức .....	3
Bài 2. Nhân đa thức với đa thức .....	5
Bài 3. Những hằng đẳng thức đáng nhớ .....	8
Bài 4. Những hằng đẳng thức đáng nhớ (tiếp) .....	11
Bài 5. Những hằng đẳng thức đáng nhớ (tiếp) .....	12
Bài 6. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung .....	15
Bài 7. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức ..	16
Bài 8. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm các hạng tử .....	18
Bài 9. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp ...	19
Bài 10. Chia đơn thức cho đơn thức .....	21
Bài 11. Chia đa thức cho đơn thức .....	22
Bài 12. Chia đa thức một biến đã sắp xếp .....	24

## Chương II – phân thức đại số

Bài 1. Phân thức đại số .....	30
Bài 2. Tính chất cơ bản của phân thức .....	31
Bài 3. Rút gọn phân thức .....	33
Bài 4. Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức .....	35
Bài 5. Phép cộng các phân thức đại số .....	39
Bài 6. Phép trừ các phân thức đại số .....	43
Bài 7. Phép nhân các phân thức đại số .....	47
Bài 8. Phép chia các phân thức đại số .....	48
Bài 9. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức .....	50

## Chương I- Tứ giác

Bài 1. Tứ giác .....	59
Bài 2. Hình thang .....	63
Bài 3. Hình thang cân .....	65
Bài 4. Đường trung bình của tam giác, của hình thang .....	68
Bài 5. Dựng hình bằng thước và compa. dựng hình thang .....	71
Bài 6. Đối xứng trục .....	74
Bài 7. Hình bình hành .....	76
Bài 8. Đối xứng tâm .....	78
Bài 9. Hình chữ nhật .....	81
Bài 10. Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước .....	85
Bài 11. Hình thoi .....	88
Bài 12. Hình vuông .....	91

## Chương II: Đa giác – diện tích của đa giác

Bài 1. Đa giác – đa giác đều .....	96
Bài 2. Diện tích hình chữ nhật .....	98
Bài 3. Diện tích tam giác .....	103
Bài 4. Diện tích hình thang .....	106
Bài 5. Diện tích hình thoi .....	109
Bài 6. diện tích đa giác .....	111



# Chương I – PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

## §1. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Muốn nhân một đơn thức với một đa thức ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

$$A(B+C) = AB+AC$$

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** Làm tính nhân:

a)  $x^2 \left( 5x^3 - x - \frac{1}{2} \right)$

b)  $(3xy - x^2 + y) \frac{2}{3} x^2 y$

c)  $(4x^3 - 5xy + 2x) \left( -\frac{1}{2} xy \right)$

**Giải**

a)  $x^2 \left( 5x^3 - x - \frac{1}{2} \right) = 5x^5 - x^3 - \frac{1}{2} x^2$

b)  $(3xy - x^2 + y) \frac{2}{3} x^2 y = 2x^3 y^2 - \frac{2}{3} x^4 y + \frac{2}{3} x^2 y^2$

c)  $(4x^3 - 5xy + 2x) \left( -\frac{1}{2} xy \right) = -2x^4 y + \frac{5}{2} x^2 y^2 - x^2 y$

**Bài 2.** Thực hiện phép nhân, rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

a)  $x(x - y) + y(x + y)$  tại  $x = -6$  và  $y = 8$

b)  $x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x)$  tại  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = -100$

**Giải**

a)  $A = x(x - y) + y(x + y) = x^2 - xy + yx + y^2 = x^2 + y^2$

Thay  $x = -6$  và  $y = 8$  vào ta được:  $A = (-6)^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

b)  $B = x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x) = x^3 - xy - x^3 - x^2 y + yx^2 - yx$   
 $= (2x - 2y) - (x^2 - 2xy + y^2) = 2(x - y) - (x - y)^2$

Thay  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = -100$  vào ta được:  $B = -2 \left( \frac{1}{2} \right) (-100) = 100$

**Bài 3.** Tìm x, biết:

a)  $3x(12x - 4) - 9x(4x - 3) = 30$

b)  $x(5 - 2x) + 2x(x - 1) = 15$



### Giải

$$a) 3x(12x - 4) - 9x(4x - 3) = 30$$

$$36x^2 - 12x - 36x^2 + 27x = 30$$

$$15x = 30$$

$$x = 2$$

$$b) x(5 - 2x) + 2x(x - 1) = 15$$

$$5x - 2x^2 + 2x^2 - 2x = 15$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

### Bài 4. Đố. Đoán tuổi

Bạn hãy lấy tuổi của mình:

- Cộng thêm 5;
- Được bao nhiêu đem nhân với 2;
- Lấy kết quả trên cộng thêm với 10;
- Nhân kết quả vừa tìm được với 5;
- Đọc kết quả cuối cùng sau khi đã trừ đi 100.

Tôi sẽ đoán được tuổi của bạn. Giải thích tại sao.

### Giải

Gọi  $x$  là số tuổi của bạn, thực hiện theo yêu cầu của bài ta có biểu thức:  $[(x + 5)2 + 10]5 - 100 = (2x + 20)5 - 100 = 10x + 100 - 100 = 10x$

Chẳng hạn theo yêu cầu bạn đọc kết quả cuối cùng là 140 thì năm nay bạn 14 tuổi (vì:  $10x = 140$  nên  $x = 140 : 10 = 14$ )

### Bài 5. Rút gọn biểu thức:

$$a) x(x - y) + y(x - y)$$

$$b) x^{n-1}(x + y) - y(x^{n-1} + y^{n-1})$$

### Giải

$$a) x(x - y) + y(x - y) = (x + y)(x - y) = (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$b) x^{n-1}(x + y) - y(x^{n-1} + y^{n-1}) = x^n + x^{n-1}y - yx^{n-1} - y^n = x^n - y^n$$

### Bài 6. Đánh dấu x vào ô mà em cho là đáp số đúng:

Giá trị của biểu thức  $ax(x - y) + y^3(x + y)$  tại  $x = -1$  và  $y = 1$  ( $a$  là hằng số) là

$a$	
$-a+2$	
$-2a$	
$2a$	

### Giải

Khi  $x = -1$  và  $y = 1$

$$\text{thì } ax(x - y) + y^3(x + y) = a(-1)(-1 - 1) + 1^3(-1 + 1) = 2a$$



## §2. NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Muốn nhân một đa thức với một đa thức ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

$$(A+B)(C+D) = AC+AD + BC+BD$$

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 7.** Làm tính nhân:

a)  $(x^2 - 2x + 1)(x - 1)$

b)  $(x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x)$

Từ câu b), hãy suy ra kết quả phép nhân  $(x^3 - 2x^2 + x - 1)(x - 5)$

**Giải**

a)  $(x^2 - 2x + 1)(x - 1) = x^2(x - 1) - 2x(x - 1) + 1(x - 1)$

$$= x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

b)  $(x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x) = x^3(5 - x) - 2x^2(5 - x) + x(5 - x) - 1(5 - x)$

$$= 5x^3 - x^4 - 10x^2 + 2x^3 + 5x - x^2 - 5 + x$$

$$= -x^4 + 7x^3 - 11x^2 + 6x - 5$$

Ta có:  $(x^3 - 2x^2 + x - 1)(x - 5) = -(x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x)$

$$= -(-x^4 + 7x^3 - 11x^2 + 6x - 5)$$

$$= x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 6x + 5$$

**Bài 8.** Làm tính nhân:

a)  $\left(x^2y^2 - \frac{1}{2}xy + 2y\right)(x - 2y)$

b)  $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$

**Giải**

a)  $\left(x^2y^2 - \frac{1}{2}xy + 2y\right)(x - 2y) = x^2y^2(x - 2y) - \frac{1}{2}xy(x - 2y) + 2y(x - 2y)$

$$= x^3y^2 - 2x^2y^3 - \frac{1}{2}x^2y + xy^2 + 2yx - 4y^2$$

b)  $(x^2 - xy + y^2)(x + y) = x^2(x + y) - xy(x + y) + y^2(x + y)$

$$= x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 + y^2x + y^3 = x^3 + y^3$$

**Bài 9.** Điền kết quả tính được vào bảng:

Giá trị của x và y	Giá trị của biểu thức $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
$x = -10; y = 2$	
$x = -1; y = 0$	
$x = 2; y = -1$	
$x = -0,5; y = 1,25$ (Trường hợp này có thể dùng máy tính bỏ túi để tính)	



### Giải

\* Rút gọn biểu thức:

$$A = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)x^2 + (x - y)xy + (x - y)y^2$$

$$\frac{2}{3}x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x(x - 2)(x + 2) = 0$$

\* Khi  $x = -10$ ;  $y = 2$  thì  $A = (-10)^3 - 2^3 = -1000 - 8 = -1008$

\* Khi  $x = -1$ ;  $y = 0$  thì  $A = (-1)^3 - 0^3 = -1$

\* Khi  $x = 2$ ;  $y = -1$  thì  $A = 2^3 - (-1)^3 = 8 + 1 = 9$

\* Khi  $x = -0,5$ ;  $y = 1,25$  thì

$$A = (-0,5)^3 - 1,25^3 = -0,125 - 1,953125 = -2,078125$$

### LUYỆN TẬP

**Bài 10.** Thực hiện phép tính

a)  $(x^2 - 2x + 3)\left(\frac{1}{2}x - 5\right)$

b)  $(x^2 - 2xy + y^2)(x - y)$

### Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (x^2 - 2x + 3)\left(\frac{1}{2}x - 5\right) &= \frac{1}{2}x(x^2 - 2x + 3) - 5(x^2 - 2x + 3) \\ &= \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - 5x^2 + 10x - 15 \\ &= \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + \frac{23}{2}x - 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x^2 - 2xy + y^2)(x - y) &= x(x^2 - 2xy + y^2) - y(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= x^3 - 2x^2y + xy^2 - yx^2 + 2xy^2 - y^3 \\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \end{aligned}$$

**Bài 11.** Chứng minh rằng các giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:  $(x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7$

### Giải

$$\begin{aligned} &(x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7 \\ &= x(2x + 3) - 5(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7 \\ &= 2x^2 + 3x - 10x - 15 - 2x^2 + 6x + x + 7 = -8 \end{aligned}$$

Nên biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến

**Bài 12.** Tính giá trị của biểu thức  $(x^2 - 5)(x + 3) + (x + 4)(x - x^2)$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $x = 0$

b)  $x = 15$

c)  $x = -15$

d)  $x = 0,15$

### Giải

\* Rút gọn biểu thức:

$$P = (x^2 - 5)(x + 3) + (x + 4)(x - x^2)$$



$$= x^2(x+3) - 5(x+3) + x(x-x^2) + 4(x-x^2)$$

$$= x^3 + 3x^2 - 5x - 15 + x^2 - x^3 + 4x - 4x^2 = -(x+15)$$

- a)  $x = 0$  thì  $P = -(0+15) = -15$   
 b)  $x = 15$  thì  $P = -(15+15) = -30$   
 c)  $x = -15$  thì  $P = -(-15+15) = 0$   
 d)  $x = 0,15$  thì  $P = -(0,15+15) = -15,15$

**Bài 13.** Tìm  $x$ , biết:  $(12x-5)(4x-1) + (3x-7)(1-16x) = 81$

**Giải**

$$(12x-5)(4x-1) + (3x-7)(1-16x) = 81$$

$$4x(12x-5) - (12x-5) + (3x-7) - 16x(3x-7) = 81$$

$$48x^2 - 20x - 12x + 5 + 3x - 7 - 48x^2 + 112x = 81$$

$$83x - 2 = 81$$

$$83x = 81 + 2$$

$$83x = 83$$

$$x = 1$$

**Bài 14.** Tìm ba số tự nhiên chẵn liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 192.

**Giải**

Gọi ba số tự nhiên chẵn liên tiếp là  $2x$ ,  $2x+2$  và  $2x+4$  với  $x \in \mathbb{N}$

Ta có:  $(2x+2)(2x+4) = 2x(2x+2) + 192$

$$2x(2x+2) + 4(2x+2) = 2x(2x+2) + 192$$

$$4x^2 + 4x + 8x + 8 = 4x^2 + 4x + 192$$

$$4x^2 + 4x + 8x - 4x^2 - 4x = 192 - 8$$

$$8x = 184$$

$$x = 184 : 8 = 23$$

Các số tự nhiên cần tìm: 46, 48 và 50

**Bài 15.** Làm tính nhân:

a)  $\left(\frac{1}{2}x + y\right)\left(\frac{1}{2}x + y\right)$

b)  $\left(x - \frac{1}{2}y\right)\left(x - \frac{1}{2}y\right)$

**Giải**

a)  $\left(\frac{1}{2}x + y\right)\left(\frac{1}{2}x + y\right) = \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x + y\right) + y\left(\frac{1}{2}x + y\right)$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xy + y^2 = \frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$$

b)  $\left(x - \frac{1}{2}y\right)\left(x - \frac{1}{2}y\right) = x\left(x - \frac{1}{2}y\right) - \frac{1}{2}y\left(x - \frac{1}{2}y\right)$

$$= x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$$



### §3. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

#### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

$$1. (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$2. (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$3. A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

#### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 16.** Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

a)  $x^2 + 2x + 1$

b)  $9x^2 + y^2 + 6xy$

c)  $25a^2 + 4b^2 - 20ab$

d)  $x^2 - x + \frac{1}{4}$

**Giải**

a)  $x^2 + 2x + 1 = (x)^2 + 2.x.1 + 1^2 = (x + 1)^2$

b)  $9x^2 + y^2 + 6xy = (3x)^2 + 2.(3x).y + (y)^2 = (3x + y)^2$

c)  $25a^2 + 4b^2 - 20ab = (5a)^2 - 2.(5a).(2b) + (2b)^2 = (5a - 2b)^2$

d)  $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

**Bài 17.** Chứng minh rằng:  $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$

Tư đó em hãy nêu cách tính nhẩm bình phương của một số tự nhiên có tận cùng bằng chữ số 5.

Áp dụng để tính:  $25^2; 35^2; 65^2; 75^2$

**Giải**

Ta có:  $(10a + 5)^2 = (10a)^2 + 2.(10a).5 + 5^2$

$$= 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$$

Áp dụng:  $25^2 = (20 + 5)^2 = (10.2 + 5)^2 = 100.2(2 + 1) + 25$

$$= 200.3 + 25 = 600 + 25 = 625$$

$$35^2 = (10.3 + 5)^2 = 100.3(3 + 1) + 25$$

$$= 300.4 + 25 = 1200 + 25 = 1225$$

$$65^2 = (10.6 + 5)^2 = 100.6(6 + 1) + 25 = 600.7 + 25 = 4200 + 25 = 4225$$

$$75^2 = (10.7 + 5)^2 = 100.7(7 + 1) + 25 = 700.8 + 25 = 5600 + 25 = 5625$$

**Bài 18.** Hãy tìm cách giúp bạn An khôi phục lại những hằng đẳng thức bị mực làm nhòe đi một số chỗ:

a)  $x^2 + 6xy + \dots = (\dots + 3y)^2$

b)  $\dots - 10xy + 25y^2 = (\dots - \dots)^2$

Hãy nêu một đề bài tương tự.

**Giải**



- a)  $x^2 + 6xy + \dots = (\dots + 3y)^2$  nên  $(x)^2 + 2.(x).(3y) + (3y)^2 = (x + 3y)^2$   
 b)  $\dots - 10xy + 25y^2 = (\dots - \dots)^2$  nên  $(x)^2 - 2.(x).(5y) + (5y)^2 = (x - 5y)^2$   
 c) Một đề bài tương tự:  $(3x - \dots)^2 = \dots - \dots + y^2$

**Bài 19. Đố.** Tính diện tích phần còn lại mà không cần đo.

Từ một miếng tôn hình vuông có cạnh bằng  $a + b$ , bác thợ cắt đi một miếng cũng hình vuông có cạnh bằng  $a - b$  (cho  $a > b$ ). Diện tích phần còn lại là bao nhiêu? Diện tích phần còn lại có phụ thuộc vào vị trí cắt không?

**Giải**

Diện tích hình vuông có cạnh bằng  $a + b$  là  $S = (a + b)^2$

Diện tích hình vuông có cạnh bằng  $a - b$  là  $S_1 = (a - b)^2$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích phần còn lại: } S_2 &= S - S_1 = (a + b)^2 - (a - b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab \end{aligned}$$

Vậy  $S_2 = 4ab$  có giá trị không đổi nên  $S_2$  không phụ thuộc vào vị trí cắt

**Luyện tập**

**Bài 20.** Nhận xét sự đúng, sai của kết quả sau:

$$x^2 + 2xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$$

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (x + 2y)^2 &= x^2 + 2.(x).(2y) + (2y)^2 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 \neq x^2 + 2xy + 4y^2 \end{aligned}$$

Kết quả trên sai.

**Bài 21.** Viết các đa thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

a)  $9x^2 - 6x + 1$

b)  $(2x + 3y)^2 + 2(2x + 3y) + 1$

Hãy nêu một đề bài tương tự.

**Giải**

a)  $9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2.(3x).1 + 1^2 = (3x - 1)^2$

b)  $(2x + 3y)^2 + 2(2x + 3y) + 1 = (2x + 3y)^2 + 2(2x + 3y).1 + 1^2 = (2x + 3y + 1)^2$

Một đề tương tự:  $16x^2y^4 - 8xy^2 + 1$

**Bài 22.** Tính nhanh: a)  $101^2$

b)  $199^2$

c)  $47.53$

**Giải**

a)  $x^2 - xy + x - y = x.x - xy + x - y = x(x - y) + (x - y) = (x - y)(x + 1)$

b)  $199^2 = (200 - 1)^2 = 200^2 - 2.200.1 + 1^2 = 40000 - 400 + 1 = 39601$

c)  $47.53 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$



**Bài 23.** Chứng minh rằng:  $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$  và  
 $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

Áp dụng

a) Tính  $(a - b)^2$ , biết  $a + b = 7$  và  $a.b = 12$ .

b) Tính  $(a + b)^2$ , biết  $a - b = 20$  và  $a.b = 3$ .

**Giải**

Ta có:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  và  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(a - b)^2 + 4ab = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$(a + b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Áp dụng

a) Khi  $a + b = 7$  và  $a.b = 12$  thì

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 7^2 - 4.12 = 49 - 48 = 1$$

b) Khi  $a - b = 20$  và  $a.b = 3$  thì

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab = 20^2 + 4.3 = 400 + 12 = 412$$

**Bài 24.** Tính giá trị của biểu thức  $49x^2 - 70x + 25$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $x = 5$

b)  $x = \frac{1}{7}$

**Giải**

Ta có:  $Q = 49x^2 - 70x + 25 = (7x)^2 - 2.(7x).5 + 5^2 = (7x - 5)^2$

a) Khi  $x = 5$  thì  $Q = (7.5 - 5)^2 = 30^2 = 900$

b) Khi  $x = \frac{1}{7}$  thì  $Q = \left(7.\frac{1}{7} - 5\right)^2 = (1 - 5)^2 = (-4)^2 = 16$

**Bài 25.** Tính: a)  $(a + b + c)^2$       b)  $(a + b - c)^2$       c)  $(a - b - c)^2$

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } (a + b + c)^2 &= [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (a + b - c)^2 &= [(a + b) - c]^2 = (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (a - b - c)^2 &= [(a - b) - c]^2 = (a - b)^2 - 2(a - b)c + c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac \end{aligned}$$



## §4. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

(tiếp)

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

$$1. (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \quad 2. (A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 26.** Tính: a)  $(2x^2 + 3y)^3$  b)  $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3$

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x^2 + 3y)^3 &= (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2(3y) + 3(2x^2)(3y)^2 + (3y)^3 \\ &= 8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot 3 + 3\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot 3^2 - 3^3 \\ &= \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x - 27 \end{aligned}$$

**Bài 27.** Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc một hiệu:

$$\text{a) } = [(2x + 1) + (3x - 1)]^2 = (2x + 1 + 3x - 1)^2 = (5x)^2 = 25x^2$$

$$\text{b) } 8 - 12x + 6x^2 - x^3$$

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } &= [(2x + 1) + (3x - 1)]^2 = (2x + 1 + 3x - 1)^2 = (5x)^2 = 25x^2 \\ &= -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -(x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 - 1^3) \\ &= -(x - 1)^3 = (1 - x)^3 \end{aligned}$$

$$\text{b) } 8 - 12x + 6x^2 - x^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2x + 3 \cdot 2 \cdot x^2 - x^3 = (2 - x)^3$$

**Bài 28.** Tính giá trị của biểu thức:

$$\text{a) } x^3 + 12x^2 + 48x + 64 \text{ tại } x = 6 \quad \text{b) } x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \text{ tại } x = 22$$

**Giải**

$$\text{a) } A = x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 + 4^3 = (x + 4)^3$$

$$\text{Khi } x = 6 \text{ thì } A = (6 + 4)^3 = 10^3 = 1000$$

$$\text{b) } B = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = (x - 2)^3$$

$$\text{Khi } x = 22 \text{ thì } B = (22 - 2)^3 = 20^3 = 8000$$

**Bài 29. Đố.** Đúc tính đáng quý.

Hãy viết mỗi biểu thức sau dưới dạng bình phương hoặc lập phương của một tổng hoặc một hiệu, rồi điền chữ cùng dòng với biểu thức đó vào bảng cho thích hợp. Sau khi thêm dấu, em sẽ tìm ra một trong những đức tính quý báu của con người.



$$\begin{array}{ll} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & N \\ 16 + 8x + x^2 & U \\ 3x^2 + 3x + 1 + x^3 & H \\ 1 - 2y + y^2 & \hat{} \end{array}$$

$(x-1)^3$	$(x+1)^3$	$(y-1)^2$	$(x-1)^3$	$(1+x)^3$	$(1-y)^2$	$(x+4)^2$

**Giải**

Ta có:  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1 - 1^3 = (x-1)^3 \rightarrow N$

$16 + 8x + x^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + x^2 = (4+x)^2 \rightarrow U$

$3x^2 + 3x + 1 + x^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = (x+1)^3 \rightarrow H$

$1 - 2y + y^2 = (1-y)^2 = (y-1)^2 \rightarrow \hat{}^$

Suy ra:

$(x-1)^3$	$(x+1)^3$	$(y-1)^2$	$(x-1)^3$	$(1+x)^3$	$(1-y)^2$	$(x+4)^2$
N	H	Â	N	H	Â	U

**NHÂN HẬU**

## §5. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ (tiếp)

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.  $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

2.  $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 30.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $(x+3)(x^2 - 3x + 9) - (54 + x^3)$

b)  $(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

**Giải**

a)  $(x+3)(x^2 - 3x + 9) - (54 + x^3) = (x+3)(x^2 - 3x + 3^2) - (54 + x^3)$   
 $= (x^3 + 3^3) - (54 + x^3) = x^3 + 27 - 54 - x^3 = -27$

b)  $B = (2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$   
 $= (2x+y)[(2x)^2 - 2x \cdot y + y^2] - (2x-y)[(2x)^2 + 2x \cdot y + y^2]$   
 $= [(2x)^3 + y^3] - [(2x)^3 - y^3] = 8x^3 + y^3 - 8x^3 + y^3 = 2y^3$



**Bài 31.** Chứng minh rằng:

a)  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

b)  $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

*Ap dụng:* Tính  $a^3 + b^3$ , biết  $a.b = 6$  và  $a + b = -5$

**Giải**

a) Ta có:  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

Suy ra:  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

b)  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

Suy ra:  $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

*Ap dụng:*  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$$= (-5)^3 - 3.6(-5) = -125 + 90 = -35$$

**Bài 32.** Điền các đơn thức thích hợp vào ô trống :

a)  $x^2 - 2xy + \square = (x \square)^2 = \square x^2$

b)  $(2x - \square)(\square + 10x + \square) = 8x^3 - 125$

**Giải**

a) Ta có:  $27x^3 + y^3 = (3x)^3 + y^3 = (3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

b) Ta có:  $8x^3 - 125 = (2x)^3 - 5^3 = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$

### LUYỆN TẬP

**Bài 33.** Tính:

a)  $(2 + xy)^2$

b)  $(5 - 3x)^2$

c)  $(5 - x^2)(5 + x^2)$

d)  $(5x - 1)^3$

e)  $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

f)  $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

**Giải**

a)  $(2 + xy)^2 = 2^2 + 2.2.xy + (xy)^2 = 4 + 4xy + x^2y^2$

b)  $(5 - 3x)^2 = 5^2 - 2.5.3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$

c)  $(5 - x^2)(5 + x^2) = 5^2 - (x^2)^2 = 25 - x^4$

d)  $(5x - 1)^3 = (5x)^3 - 3.(5x)^2.1 + 3.(5x).1^2 - 1^3 = 125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$

e)  $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = (2x - y)[(2x)^2 + (2x)y + y^2] = [(2x)^3 - y^3] = 8x^3 - y^3$

f)  $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = (x + 3)(x^2 - 3x + 3^2) = x^3 + 3^3 = x^3 + 27$

**Bài 34.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $(a + b)^2 - (a - b)^2$

b)  $(a + b)^3 - (a - b)^3 - 2b^3$

c)  $(x + y + z)^2 - 2(x + y + z)(x + y) + (x + y)^2$

**Giải**

a)  $(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$



Cách khác:  $(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a+b+a-b)(a+b-a+b) = 2a.2b = 4ab$

$$\begin{aligned} \text{b) } (a+b)^3 - (a-b)^3 - 2b^3 &= [(a+b)^3 - (a-b)^3] - 2b^3 \\ &= [(a+b) - (a-b)][(a+b)^2 + (a+b)(a-b) + (a-b)^2] - 2b^3 \\ &= 2b[2a^2 + 2b^2 + a^2 - b^2] - 2b^3 = 2b(3a^2 + b^2) - 2b^3 = 6a^2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= (x+y+z)^2 - 2(x+y+z)(x+y) + (x+y)^2 \\ &= [(x+y+z) - (x+y)]^2 = (x+y+z-x-y)^2 = z^2 \end{aligned}$$

**Bài 35.** Tính nhanh:

a)  $34^2 + 66^2 + 68.66$

b)  $74^2 + 24^2 - 48.74$

**Giải**

a)  $34^2 + 66^2 + 68.66 = 34^2 + 2.34.66 + 66^2 = (34 + 66)^2 = 100^2 = 10000$

b)  $74^2 + 24^2 - 48.74 = 74^2 - 2.24.74 + 24^2 = (74 - 24)^2 = 50^2 = 2500$

**Bài 36.** Tính giá trị của biểu thức

a)  $x^2 + 4x + 4$  tại  $x = 98$

b)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  tại  $x = 99$

**Giải**

a)  $A = x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2.2.x + 2^2 = (x + 2)^2$

tại  $x = 98$  thì  $A = (98 + 2)^2 = 100^2 = 10000$

b)  $B = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3x^2.1 + 3.x.1^2 + 1^3 = (x + 1)^3$

tại  $x = 99$  thì  $B = (99 + 1)^3 = 100^3 = 1000000$

**Bài 37.** Dùng bút chì nối các biểu thức sao cho chúng tạo thành hai vế của một hằng đẳng thức (theo mẫu)

$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
$(x + y)(x - y)$
$x^2 - 2xy + y^2$
$(x + y)^2$
$(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
$y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$
$(x - y)^3$

$x^3 + y^3$
$x^3 - y^3$
$x^2 + 2xy + y^2$
$x^2 - y^2$
$(y - x)^2$
$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
$(x + y)^3$

**Giải**

Ta có:  $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$  và

$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$  và  $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = (y - x)^2$

$y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3 = (y + x)^3 = (x + y)^3$  và

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$



Từ đó, ta có:

$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$x^3 + y^3$
$(x + y)(x - y)$	$x^3 - y^3$
$x^2 - 2xy + y^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
$(x + y)^2$	$x^2 - y^2$
$(x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$(y - x)^2$
$y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$	$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
$(x - y)^3$	$(x + y)^3$

**Bài 38.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a)  $(a - b)^3 = -(b - a)^3$

b)  $(-a - b)^2 = (a + b)^2$

**Giải**

a)  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = -(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3) = -(b - a)^3$

b)  $(-a - b)^2 = [(-a) - b]^2 = (-a)^2 - 2(-a)b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

## §6. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT NHÂN TỬ CHUNG

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phân tích đa thức thành nhân tử nghĩa là biến đổi đa thức đó thành tích của những đơn thức và đa thức.

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 39.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $3x - 6y$

b)  $\frac{2}{5}x^2 + 5x^3 + x^2y$

c)  $14x^2y - 21xy^2 + 28x^2y^2$

d)  $\frac{2}{5}x(y - 1) - \frac{2}{5}y(y - 1)$

e)  $10x(x - y) - 8y(y - x)$

**Giải**

a)  $3x - 6y = 3x - 3 \cdot 2y = 3(x - 2y)$

b)  $\frac{2}{5}x^2 + 5x^3 + x^2y = \frac{2}{5}x^2 + 5x^2 \cdot x + x^2y = x^2 \left( \frac{2}{5} + 5x + y \right)$

c)  $14x^2y - 21xy^2 + 28x^2y^2 = 2 \cdot 7xy \cdot x - 3 \cdot 7xy \cdot y + 4 \cdot 7xy \cdot xy = 7xy(2x - 3y + 4xy)$

d)  $\frac{2}{5}x(y - 1) - \frac{2}{5}y(y - 1) = \frac{2}{5}(y - 1)(x - y)$

e)  $10x(x - y) - 8y(y - x) = 2(x - y) \cdot 5x + 2(x - y) \cdot 4y = 2(x - y)(5x + 4y)$



**Bài 40.** Tính giá trị của các biểu thức:

a)  $15.91,5 + 150.0,85$

b)  $x(x-1) - y(1-x)$  tại  $x = 2001$  và  $y = 1999$

**Giải**

a)  $15.91,5 + 150.0,85 = 15.91,5 + 15.10.0,85$

$$= 15(91,5 + 8,5) = 15.100 = 1500$$

b)  $P = x(x-1) - y(1-x) = x(x-1) + y(x-1) = (x-1)(x+y)$

$x = 2001$  và  $y = 1999$  thì

$$P = (2001-1)(2001+1999) = 2000.4000 = 8000000$$

**Bài 41.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $5x(x-2000) - x + 2000 = 0$

b)  $x^3 - 13x = 0$

**Giải**

a)  $5x(x-2000) - x + 2000 = 0$

$$5x(x-2000) - (x-2000) = 0$$

$$(x-2000)(5x-1) = 0$$

Suy ra:  $x - 2000 = 0$  hoặc  $5x - 1 = 0$

$$x = 2000 \text{ hoặc } x = \frac{1}{5}$$

Vậy  $x = 2000$  hoặc  $x = \frac{1}{5}$

b)  $x^3 - 13x = 0$

$$x.x^2 - 13x = 0$$

$$x(x^2 - 13) = 0. \text{ Suy ra:}$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x^2 - 13 = 0$$

$$\text{Từ } x^2 - 13 = 0$$

$$x^2 = 13 \text{ nên } x = \pm\sqrt{13}$$

$$\text{Vậy } x = 0 \text{ hoặc } x = \pm\sqrt{13}$$

**Bài 42.** Chứng minh rằng  $55^{n+1} - 55^n$  chia hết cho 54 (với  $n$  là số tự nhiên)

**Giải**

$$\text{Ta có: } 55^{n+1} - 55^n = 55^n.55 - 55^n = 55^n(55 - 1) = 55^n.54 : 54 \text{ với } n \in \mathbb{N}$$

## §7. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP DÙNG HẰNG ĐẲNG THỨC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Vận dụng các hằng đẳng thức để biến đổi đa thức thành tích của những đơn thức và đa thức.

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 43.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a)  $x^2 + 6x + 9$

b)  $10x - 25 - x^2$

c)  $8x^3 - \frac{1}{8}$

d)  $\frac{1}{25}x^2 - 64y^2$



***Giải***

a)  $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = (x + 3)^2$

$$\text{b) } 10x - 25 - x^2 = -(x^2 - 10x + 25) = -(x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2) = -(x - 5)^2$$

c)  $8x^3 - \frac{1}{8} = (2x)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(4x^2 + x + \frac{1}{4}\right)$

$$\text{d) } \frac{1}{25}x^2 - 64y^2 = \left(\frac{x}{5}\right)^2 - (8y)^2 = \left(\frac{x}{5} - 8y\right)\left(\frac{x}{5} + 8y\right)$$

**Bài 44.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$\text{a) } x^3 + \frac{1}{27}$$

$$b) (a + b)^3 - (a - b)^3$$

c)  $(a + b)^3 + (a - b)^3$

d)  $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

e)  $-x^3 + 9x^2 - 27x + 27$

***Giải***

$$\text{a) } x^3 + \frac{1}{27} = x^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (a+b)^3 - (a-b)^3 &= [(a+b) - (a-b)][(a+b)^2 + (a+b)(a-b) + (a-b)^2] \\ &= (a+b-a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + a^2 - 2ab + b^2) \\ &= 2b(3a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (a+b)^3 + (a-b)^3 &= [(a+b) + (a-b)][(a+b)^2 - (a+b)(a-b) + (a-b)^2] \\ &= (a+b+a-b)(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + b^2 + a^2 - 2ab + b^2) \\ &= 2a(a^2 + 3b^2) \end{aligned}$$

d)  $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 = (2x)^3 + 3.(2x)^2y + 3.(2x)y^2 + y^3 = (2x + y)^3$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad -x^3 + 9x^2 - 27x + 27 &= -(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) \\ &= -(x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 - 3^3) = -(x - 3)^3 = (3 - x)^3 \end{aligned}$$

**Bài 45.** Tìm  $x$ , biết:

$$\text{a) } 2 - 25x^2 = 0$$

$$\text{b) } x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

***Giải***

a)  $2 - 25x^2 = 0$

b)  $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

$$(\sqrt{2})^2 - (5x)^2 = 0$$

$$(\sqrt{2} - 5x)(\sqrt{2} + 5x) = 0. Suy ra$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\sqrt{2} - 5x = 0 \text{ hoặc } \sqrt{2} + 5x = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{5} \text{ hoặc } x = -\frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$x - \frac{1}{2} = 0 \text{ nên } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{\sqrt{2}}{5} \text{ hoặc } x = -\frac{\sqrt{2}}{5}$$



$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}$$

**Bài 46.** Tính nhanh:

a)  $73^2 - 27^2$       b)  $37^2 - 13^2$       c)  $2002^2 - 2^2$

**Giải**

a)  $73^2 - 27^2 = (73 - 27)(73 + 27) = 46.100 = 4600$

b)  $37^2 - 13^2 = (37 - 13)(37 + 13) = 24.50 = 1200$

c)  $2002^2 - 2^2 = (2002 - 2)(2002 + 2) = 2000.2004 = 4008000$

## §8. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP NHÓM CÁC HẠNG TỬ

**Bài 47.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $x^2 - xy + x - y$

b)  $xz + yz - 5(x + y)$

c)  $3x^2 - 3xy - 5x + 5y$

**Giải**

a)  $x^2 - xy + x - y = x.x - xy + x - y = x(x - y) + (x - y) = (x - y)(x + 1)$

b)  $xz + yz - 5(x + y) = z(x + y) - 5(x + y) = (x + y)(z - 5)$

c)  $3x^2 - 3xy - 5x + 5y = 3x(x - y) - 5(x - y) = (x - y)(3x - 5)$

**Bài 48.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $x^2 + 4x - y^2 + 4$

b)  $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3z^2$

c)  $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2$

**Giải**

a)  $x^2 + 4x - y^2 + 4 = (x^2 + 4x + 4) - y^2 = (x + 2)^2 - y^2 = (x + 2 + y)(x + 2 - y)$

b)  $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3z^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2) - 3z^2 = 3(x + y)^2 - 3z^2$   
 $= 3[(x + y)^2 - z^2] = 3(x + y - z)(x + y + z)$

c)  $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - (z^2 - 2zt + t^2)$   
 $= (x - y)^2 - (z - t)^2 = (x - y - z + t)(x - y + z - t)$

**Bài 49.** Tính nhanh:

a)  $37,5.6,5 - 7,5.3,4 - 6,6.7,5 + 3,5.37,5$       b)  $45^2 + 40^2 - 15^2 + 80.45$

**Giải**

a)  $37,5.6,5 - 7,5.3,4 - 6,6.7,5 + 3,5.37,5$   
 $= (37,5.6,5 + 3,5.37,5) - (7,5.3,4 + 6,6.7,5)$   
 $= 37,5(6,5 + 3,5) - 7,5(3,4 + 6,6)$   
 $= 37,5.10 - 7,5.10 = 10(37,5 - 7,5) = 10.30 = 300$

b)  $45^2 + 40^2 - 15^2 + 80.45 = (45^2 + 2.40.45 + 40^2) - 15^2 = (45 + 40)^2 - 15^2$



$$= 85^2 - 15^2 = (85 - 15)(85 + 15) = 70.100 = 7000$$

**Bài 50.** Tìm x, biết:

a)  $x(x - 2) + x - 2 = 0$

b)  $5x(x - 3) - x + 3 = 0$

**Giải**

a)  $x(x - 2) + x - 2 = 0$

$(x + 1)(x - 2) = 0$  suy ra:

$x + 1 = 0$  hoặc  $x - 2 = 0$

$x = -1$  hoặc  $x = 2$

Vậy  $x = -1$  hoặc  $x = 2$

b)  $5x(x - 3) - x + 3 = 0$

$(x - 3)(5x - 1) = 0$  suy ra:

$x - 3 = 0$  hoặc  $5x - 1 = 0$

$x = 3$  hoặc  $x = \frac{1}{5}$

Vậy  $x = 3$  hoặc  $x = \frac{1}{5}$

## §9. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG CÁCH PHỐI HỢP NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

**Bài 51.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $x^3 - 2x^2 + x$       b)  $2x^2 + 4x + 2 - 2y^2$       c)  $2xy - x^2 - y^2 + 16$

**Giải**

a)  $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$

b)  $2x^2 + 4x + 2 - 2y^2 = 2(x^2 + 2x + 1) - 2y^2 = 2(x + 1)^2 - 2y^2 = 2[(x + 1)^2 - y^2]$   
 $= 2(x + 1 - y)(x + 1 + y)$

c)  $2xy - x^2 - y^2 + 16 = -(x^2 - 2xy + y^2) + 16 = 16 - (x - y)^2$   
 $= (4 - x + y)(4 + x - y)$

**Bài 52.** Chứng minh rằng  $(5n + 2)^2 - 4$  chia hết cho 5 với mọi số nguyên n.

**Giải**

$$(5n + 2)^2 - 4 = (5n + 2)^2 - 2^2 = (5n + 2 - 2)(5n + 2 + 2) = 5n(5n + 4) : 5, \forall n \in \mathbb{Z}$$

**Bài 53.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $x^2 - 3x + 2$       b)  $x^2 + x - 6$       c)  $x^2 + 5x + 6$

**Giải**

a)  $x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1)(x - 1)(x - 2)$

b)  $x^2 + x - 6 = x^2 - 2x + 3x - 6 = x(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x + 3)$

c)  $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$

## LUYỆN TẬP

**Bài 54.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x$

b)  $2x - 2y - x^2 + 2xy - y^2$

c)  $x^4 - 2x^2$

**Giải**



$$\begin{aligned} \text{a) } x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x &= x(x^2 + 2xy + y^2) - 9x = x(x + y)^2 - 9x \\ &= x[(x + y)^2 - 3^2] = x(x + y - 3)(x + y + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x - 2y - x^2 + 2xy - y^2 &= (2x - 2y) - (x^2 - 2xy + y^2) = 2(x - y) - (x - y)^2 \\ &= \frac{(x - 3)(x + y)}{x + y} = x - 3 \end{aligned}$$

$$\text{c) } x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$$

**Bài 55.** Tìm x, biết:

$$\text{a) } x^3 - \frac{1}{4}x = 0 \quad \text{b) } (2x - 1)^2 - (x + 3)^2 = 0 \quad \text{c) } x^2(x - 3) + 12 - 4x = 0$$

**Giải**

$$\text{a) } x^3 - \frac{1}{4}x = 0$$

$$x \left( x^2 - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$x \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( x + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } (2x - 1)^2 - (x + 3)^2 = 0$$

$$(2x - 1 - x - 3)(2x - 1 + x + 3) = 0$$

$$(x - 4)(3x + 2) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ hoặc } 3x + 2 = 0$$

$$x = 4 \text{ hoặc } x = -\frac{2}{3}$$

$$\text{c) } x^2(x - 3) + 12 - 4x = 0$$

$$x^2(x - 3) - 4(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x - 3)(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0 \text{ hoặc } x + 2 = 0$$

$$x = 3 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = -2$$

**Bài 56.** Tính nhanh giá trị của đa thức:

$$\text{a) } x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \text{ tại } x = 49,75 \quad \text{b) } x^2 - y^2 - 2y - 1 \text{ tại } x = 93 \text{ và } y = 6$$

**Giải**

$$\text{a) } A = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}x + \left( \frac{1}{4} \right)^2 = \left( x + \frac{1}{4} \right)^2$$

$$\text{Tại } x = 49,75 \text{ thì } A = \left( 49,75 + \frac{1}{4} \right)^2 = (49,75 + 0,25)^2 = 50^2 = 2500$$

$$\text{b) } B = x^2 - y^2 - 2y - 1 = x^2 - (y^2 + 2y + 1) = x^2 - (y + 1)^2 = (x - y - 1)(x + y + 1)$$

$$\text{tại } x = 93 \text{ và } y = 6 \text{ thì } B = (93 - 6 - 1)(93 + 6 + 1) = 86 \cdot 100 = 8600$$

**Bài 57.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$\text{a) } x^2 - 4x + 3$$

$$\text{b) } x^2 + 5x + 4$$

$$\text{c) } x^2 - x - 6$$

$$\text{d) } x^4 + 4$$

(Gợi ý câu d) : Thêm và bớt  $4x^2$  vào đa thức đã cho



### Giải

- a)  $x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3)$   
b)  $x^2 + 5x + 4 = x^2 + x + 4x + 4 = x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x + 4)$   
c)  $x^2 - x - 6 = x^2 + 2x - 3x - 6 = x(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(x - 3)$   
d)  $x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$   
 $= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$

**Bài 58.** Chứng minh rằng  $n^3 - n$  chia hết cho 6 với mọi số nguyên  $n$

### Giải

Ta có:  $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$  với  $\forall n \in \mathbb{Z}$

$n - 1$ ,  $n$  và  $n + 1$  là ba số nguyên liên tiếp nên tích

$(n - 1)n(n + 1)$  chia hết cho 2 và tích cũng chia hết cho 3 nên

$$(n - 1)n(n + 1) : 6$$

## §10. CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Đơn thức A gọi là chia hết cho đơn thức  $B \neq 0$  nếu có một đơn thức C sao cho  $A = B.C$ , C được gọi là thương của A chia cho B
- Đơn thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A
- Quy tắc chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B)
  - + Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B
  - + Chia từng lũy thừa của biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B
  - + Nhân các kết quả tìm được với nhau

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 59.** Làm tính

a)  $5^3 : (-5)^2$       b)  $\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^3$       c)  $(-12)^3 : 8^3$

### Giải

a)  $5^3 : (-5)^2 = 5^3 : 5^2 = 5$       b)  $\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$   
c)  $(-12)^3 : 8^3 = -\left(\frac{12}{8}\right)^3 = -\left(\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$

**Bài 60.** Làm tính

a)  $x^{10} : (-x)^8$       b)  $(-x)^5 : (-x)^3$       c)  $(-y)^5 : (-y)^4$



### Giải

$$a) \quad x^{10} : (-x)^8 = x^{10} : x^8 = x^2$$

$$b) \quad (-x)^5 : (-x)^3 = \frac{(-x)^5}{(-x)^3} = \frac{x^5}{x^3} = x^2$$

$$c) \quad (-y)^5 : (-y)^4 = \frac{(-y)^5}{(-y)^4} = -\frac{y^5}{y^4} = -y$$

### Bài 61. Làm tính

$$a) \quad 5x^2y^4 : 10x^2y$$

$$b) \quad \frac{3}{4}x^3y^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)$$

$$c) \quad (-xy)^{10} : (-xy)^5$$

### Giải

$$a) \quad 5x^2y^4 : 10x^2y = \frac{5x^2y^4}{10x^2y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{y^4}{y} = \frac{1}{2}y^3$$

$$b) \quad \frac{3}{4}x^3y^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right) = \frac{\frac{3}{4}x^3y^3}{-\frac{1}{2}x^2y^2} = -\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^3y^3}{x^2y^2} = -\frac{3}{2}xy$$

$$c) \quad (-xy)^{10} : (-xy)^5 = \frac{(-xy)^{10}}{(-xy)^5} = -\frac{(xy)^{10}}{(xy)^5} = -x^5y^5$$

**Bài 62.** Tính giá trị của biểu thức  $15x^4y^3z^2 : 5xy^2z^2$  tại  $x = 2$ ,  $y = -10$  và  $z = 2004$

### Giải

$$P = 15x^4y^3z^2 : 5xy^2z^2 = \frac{15x^4y^3z^2}{5xy^2z^2} = \frac{15}{5} \cdot \frac{x^4}{x} \cdot \frac{y^3}{y^2} \cdot \frac{z^2}{z^2} = 3x^3y$$

$$\text{tại } x = 2, y = -10 \text{ và } z = 2004 \text{ thì } P = 3 \cdot (2)^3 \cdot (-10) = -240$$

## §11. CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Đa thức A gọi là chia hết cho đơn thức B  $\neq 0$  nếu có một đơn thức C sao cho  $A = B.C$

– Đa thức A chia hết cho đơn thức B khi các đơn thức hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B

– Quy tắc chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B): Muốn chia đa thức A cho đơn thức B, ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.



## B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 63.** Không làm tính chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B không:  $A = 15xy^2 + 17xy^3 + 18y^2$  và  $B = 6y^2$

**Giải**

Đa thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi hạng tử của A (phần chữ) chia hết cho đơn thức B

Ta có các đơn thức:  $15xy^2$ ;  $17xy^3$ ;  $18y^2$  chia hết cho đơn thức  $6y^2$  nên đa thức A có chia hết cho đơn thức B

**Bài 64.** Làm tính chia

a)  $(-2x^5 + 3x^2 - 4x^3) : 2x^2$

b)  $(x^3 - 2x^2y + 3xy^2) : \left(-\frac{1}{2}x\right)$

c)  $(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : 3xy$

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } (-2x^5 + 3x^2 - 4x^3) : 2x^2 &= \frac{-2x^5 + 3x^2 - 4x^3}{2x^2} = -\frac{2x^5}{2x^2} + \frac{3x^2}{2x^2} - \frac{4x^3}{2x^2} \\ &= -x^3 + \frac{3}{2} - 2x = -x^3 - 2x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x^3 - 2x^2y + 3xy^2) : \left(-\frac{1}{2}x\right) &= \frac{x^3 - 2x^2y + 3xy^2}{-\frac{1}{2}x} = -2 \left( \frac{x^3}{x} - \frac{2x^2y}{x} + \frac{3xy^2}{x} \right) \\ &= -2(x^2 - 2xy + 3y^2) \end{aligned}$$

c)  $(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : 3xy$

$$= \frac{3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy}{3xy} = \frac{3x^2y^2}{3xy} + \frac{6x^2y^3}{3xy} - \frac{12xy}{3xy} = xy + 2xy^2 - 4$$

**Bài 65.** Làm tính chia:  $[3(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 5(x-y)^2] : (y-x)^2$

**Giải**

$$\begin{aligned} &[3(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 5(x-y)^2] : (y-x)^2 \\ &= \frac{3(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 5(x-y)^2}{(x-y)^2} \\ &= \frac{3(x-y)^4}{(x-y)^2} + 2 \frac{(x-y)^3}{(x-y)^2} - 5 \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2} = 3(x-y)^2 + 2(x-y) - 5 \end{aligned}$$

**Bài 66.** Ai đúng, ai sai ?

Khi giải bài tập: “ Xét xem đa thức  $A = 5x^4 - 4x^3 + 6x^2y$  có chia hết cho đơn thức

$B = x^3 - 4x^2 - 12x + 27 = (x^3 + 27) - 4x(x+3) = (x+3)(x^2 - 3x + 9) - 4x(x+3)$  hay không ”.

Hà trả lời: “A không chia hết cho B vì 5 không chia hết cho 2 ”



Quang trả lời: “A chia hết cho B vì mọi hạng tử của A đều chia hết cho B”.  
Cho biết ý kiến của em về lời giải của hai bạn.

**Giải**

Ta có các đơn thức  $5x^4$ ;  $-4x^3$ ;  $6x^2y$  chia hết cho đơn thức  
 $x^3 - 4x^2 - 12x + 27 = (x^3 + 27) - 4x(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 4x(x + 3)$   
nên đa thức chia hết cho đơn thức B.  
Vậy, bạn Quang trả lời đúng

## §12. CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Muốn chia đa thức một biến A cho đa thức một biến  $B \neq 0$ , trước hết ta phải sắp xếp các đa thức này theo lũy thừa giảm dần của cùng một biến và thực hiện phép chia như phép chia các số tự nhiên.

– Với hai đa thức một biến A và B ( $B \neq 0$ ), tồn tại duy nhất hai đa thức Q và R sao cho:  $A = B \cdot Q + R$

Trong đó  $R = 0$  hoặc có bậc thấp hơn bậc của B

Nếu  $R = 0$  thì phép chia A cho B là phép chia hết

Nếu  $R \neq 0$  thì phép chia A cho B là phép chia có dư

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 67.** Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến rồi làm phép chia:

a)  $(x^3 - 7x + 3 - x^2) : (x - 3)$

b)  $(2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2 + 6x) : (x^2 - 2)$

**Giải**

a)

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 7x + 3 \\ \underline{- (x^3 - 3x^2)} \phantom{+ 0} \\ 2x^2 - 7x + 3 \\ \underline{- (2x^2 - 6x)} \phantom{+ 0} \\ -x + 3 \\ \underline{- (-x + 3)} \\ 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\ \underline{- (2x^4 - 4x^2)} \phantom{+ 0} \\ -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\ \underline{- (-3x^3 + 6x)} \phantom{+ 0} \\ x^2 - 2 \\ \underline{- (x^2 - 2)} \\ 0 \end{array}$$

**Bài 68.** Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện phép chia

a)  $(x^2 + 2xy + y^2) : (x + y)$

b)  $(125x^3 + 1) : (5x + 1)$  c)  $(x^2 - 2xy + y^2) : (y - x)$

**Giải**



$$a) (x^2 + 2xy + y^2) : (x + y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y} = \frac{(x + y)^2}{x + y} = x + y$$

$$b) (125x^3 + 1) : (5x + 1) \\ = \frac{125x^3 + 1}{5x + 1} = \frac{(5x)^3 + 1}{5x + 1} = \frac{(5x + 1)(25x^2 - 5x + 1)}{5x + 1} = 25x^2 - 5x + 1$$

$$c) (x^2 - 2xy + y^2) : (y - x) = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{y - x} = \frac{(x - y)^2}{y - x} = \frac{(y - x)^2}{y - x} = y - x$$

**Bài 69.** Cho hai đa thức :  $A = 3x^4 + x^3 + 6x - 5$  và  $B = x^2 + 1$ . Tìm dư R trong phép chia A cho B rồi viết dưới dạng  $A = B.Q + R$ .

**Giải**

$$\begin{array}{r} 3x^4 + x^3 + 6x - 5 \\ - 3x^4 \phantom{+ x^3} + 3x^2 \phantom{+ 6x} - 5 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 6x - 5 \\ - x^3 \phantom{- 3x^2} + x \phantom{+ 6x} - 5 \\ \hline - 3x^2 + 5x - 5 \\ - -3x^2 \phantom{+ 5x} - 3 \\ \hline 5x - 2 \end{array}$$

$$\text{Khi đó : } 3x^4 + x^3 + 6x - 5 = (x^2 + 1)(3x^2 + x - 3) + 5x - 2$$

### LUYỆN TẬP

**Bài 70.** Làm tính chia

$$a) (25x^5 - 5x^4 + 10x^2) : 5x^2$$

$$b) (15x^3y^2 - 6x^2y - 3x^2y^2) : 6x^2y$$

**Giải**

$$a) (25x^5 - 5x^4 + 10x^2) : 5x^2 = \frac{25x^5 - 5x^4 + 10x^2}{5x^2} = \frac{25x^5}{5x^2} - \frac{5x^4}{5x^2} + \frac{10x^2}{5x^2} \\ = 5x^3 - x^2 + 2$$

$$b) (15x^3y^2 - 6x^2y - 3x^2y^2) : 6x^2y = \frac{15x^3y^2 - 6x^2y - 3x^2y^2}{6x^2y} \\ = \frac{15x^3y^2}{6x^2y} - \frac{6x^2y}{6x^2y} - \frac{3x^2y^2}{6x^2y} = \frac{5}{2}xy - 1 - \frac{1}{2}y = \frac{5}{2}xy - \frac{1}{2}y - 1$$

**Bài 71.** Không thực hiện phép chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đa thức B hay không.

$$a) A = 15x^4 - 8x^3 + x^2, B = \frac{1}{2}x^2$$

$$b) A = x^2 - 2x + 1, B = 1 - x$$



**Giải**

a) Ta có:  $15x^4; -8x^3; x^2$  chia hết cho  $\frac{1}{2}x^2$  nên đa thức A chia hết cho đa thức B

b)  $A = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$  chia hết cho  $1 - x$

**Bài 72.** Làm tính chia:  $(2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2) : (x^2 - x + 1)$

**Giải**

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \\
 \underline{-(2x^4 - 2x^3 + 2x^2)} \\
 3x^3 - 5x^2 + 5x - 2 \\
 \underline{-(3x^3 - 3x^2 + 3x)} \\
 -2x^2 + 2x - 2 \\
 \underline{-(-2x^2 + 2x - 2)} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^2 - x + 1 \\
 \hline
 2x^2 + 3x - 2
 \end{array}$$

Khi đó:  $2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x^2 - x + 1)(2x^2 + 3x - 2)$

**Bài 73.** Tính nhanh

a)  $(4x^2 - 9y^2) : (2x - 3y)$

b)  $(27x^3 - 1) : (3x - 1)$

c)  $(8x^3 + 1) : (4x^2 - 2x + 1)$

d)  $(x^2 - 3x + xy - 3y) : (x + y)$

**Giải**

a)  $(4x^2 - 9y^2) : (2x - 3y) = \frac{4x^2 - 9y^2}{2x - 3y} = \frac{(2x - 3y)(2x + 3y)}{2x - 3y} = 2x + 3y$

b)  $(27x^3 - 1) : (3x - 1) = \frac{27x^3 - 1}{3x - 1} = \frac{(3x - 1)(9x^2 - 3x + 1)}{3x - 1} = 9x^2 - 3x + 1$

c)  $(8x^3 + 1) : (4x^2 - 2x + 1) = \frac{8x^3 + 1}{4x^2 - 2x + 1} = \frac{(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)}{4x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$

d)  $(x^2 - 3x + xy - 3y) : (x + y) = \frac{x^2 - 3x + xy - 3y}{x + y} = \frac{x(x - 3) + y(x - 3)}{x + y}$   
 $= \frac{(x - 3)(x + y)}{x + y} = x - 3$



**Bài 74.** Tìm số a để đa thức  $2x^3 - 3x^2 + x + a$  chia hết cho đa thức  $x+2$

**Giải**

Thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + x + a \\ - (2x^3 + 4x^2) \\ \hline -7x^2 + x + a \\ - (-7x^2 - 14x) \\ \hline 15x + a \\ - (15x + 30) \\ \hline a - 30 \end{array}$$

Khi đó :  $2x^3 - 3x^2 + x + a = (x + 2)(2x^2 - 7x + 15) + a - 30$

để đa thức  $2x^3 - 3x^2 + x + a$  chia hết cho đa thức  $x+2$  thì phần dư:  
 $a-30 = 0$  hay  $a = 30$

## ÔN TẬP CHƯƠNG I

**Bài 75.** Làm tính nhân:

a)  $5x^2 \cdot (3x^2 - 7x + 2)$

b)  $\frac{2}{3}xy \cdot (2x^2y - 3xy + y^2)$

**Giải**

a)  $5x^2 \cdot (3x^2 - 7x + 2) = 15x^4 - 35x^3 + 10x^2$

b)  $\frac{2}{3}xy \cdot (2x^2y - 3xy + y^2) = \frac{4}{3}x^3y^2 - 2x^2y^2 + \frac{2}{3}xy^3$

**Bài 76.** Làm tính nhân:

a)  $(2x^2 - 3x)(5x^2 - 2x + 1)$

b)  $(x - 2y)(3xy + 5y^2 + x)$

**Giải**

a)  $(2x^2 - 3x)(5x^2 - 2x + 1) = 2x^2(5x^2 - 2x + 1) - 3x(5x^2 - 2x + 1)$   
 $= 10x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 15x^3 + 6x^2 - 3x = 10x^4 - 19x^3 + 8x^2 - 3x$

b)  $(x - 2y)(3xy + 5y^2 + x) = x(3xy + 5y^2 + x) - 2y(3xy + 5y^2 + x)$   
 $= 3x^2y + 5xy^2 + x^2 - 6xy^2 - 10y^3 - 2xy = 3x^2y - xy^2 + x^2 - 10y^3 - 2xy$

**Bài 77.** Tính nhanh giá trị của biểu thức :

a)  $M = x^2 + 4y^2 - 4xy$  tại  $x = 18$  và  $y = 4$

b)  $N = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$  tại  $x = 6$  và  $y = -8$

**Giải**

a)  $M = x^2 + 4y^2 - 4xy = x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - 2 \cdot x(2y) + (2y)^2 = (x - 2y)^2$

tại  $x = 18$  và  $y = 4$  thì  $M = (18 - 2 \cdot 4)^2 = 10^2 = 100$



$$b) N = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = (2x)^3 - 3.(2x)^2y + 3.2x.y^2 - y^3 = (2x - y)^3$$

tại  $x = 6$  và  $y = -8$  thì  $N = (2.6 + 8)^3 = 20^3 = 8000$

**Bài 78.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $(x + 2)(x - 2) - (x - 3)(x + 1)$

b)  $(2x + 1)^2 + (3x - 1)^2 + 2(2x + 1)(3x - 1)$

**Giải**

$$a) (x + 2)(x - 2) - (x - 3)(x + 1) = (x^2 - 2^2) - (x^2 + x - 3x - 3) \\ = x^2 - 4 - x^2 - x + 3x + 3 = 2x - 1$$

$$b) (2x + 1)^2 + (3x - 1)^2 + 2(2x + 1)(3x - 1) \\ = (2x + 1)^2 + 2(2x + 1)(3x - 1) + (3x - 1)^2 \\ = [(2x + 1) + (3x - 1)]^2 = (2x + 1 + 3x - 1)^2 = (5x)^2 = 25x^2$$

**Bài 79.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $x^2 - 4 + (x - 2)^2$

b)  $x^3 - 2x^2 + x - xy^2$

c)  $x^3 - 4x^2 - 12x + 27$

**Giải**

$$a) x^2 - 4 + (x - 2)^2 = (x^2 - 2^2) + (x - 2)^2 = (x - 2)(x + 2) + (x - 2)^2 \\ = (x - 2)[(x + 2) + (x - 2)] = (x - 2)(x + 2 + x - 2) = 2x(x - 2)$$

$$b) x^3 - 2x^2 + x - xy^2 = x(x^2 - 2x + 1 - y^2) = x[(x^2 - 2x + 1) - y^2] \\ = x[(x - 1)^2 - y^2] = x[(x - 1) + y][(x - 1) - y] = x(x - 1 + y)(x - 1 - y)$$

$$c) x^3 - 4x^2 - 12x + 27 = (x^3 + 27) - 4x(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 4x(x + 3) \\ = (x + 3)(x^2 - 3x + 9 - 4x) = (x + 3)(x^2 - 7x + 9)$$

**Bài 80.** Làm tính chia:

a)  $(6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x + 1)$

b)  $(x^4 - x^3 + x^2 + 3x) : (x^2 - 2x + 3)$

c)  $(x^2 - y^2 + 6x + 9) : (x + y + 3)$

**Giải**

$$a) \begin{array}{r} 6x^3 - 7x^2 - x + 2 \\ \underline{6x^3 + 3x^2} \phantom{- x + 2} \\ -10x^2 - x + 2 \\ \underline{-10x^2 - 5x} \phantom{+ 2} \\ 4x + 2 \\ \underline{4x + 2} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x + 1 \\ \hline 3x^2 - 5x + 2 \end{array}$$

$$\text{Khi đó : } (6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x + 1) = \frac{6x^3 - 7x^2 - x + 2}{2x + 1} = 3x^2 - 5x + 2$$



b)

$$\begin{array}{r}
 x^4 - x^3 + x^2 + 3x \\
 \underline{-(x^4 - 2x^3 + 3x^2)} \\
 x^3 - 2x^2 + 3x \\
 \underline{-(x^3 - 2x^2 + 3x)} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 3 \\
 \hline
 x^2 + x
 \end{array}$$

Khi đó:  $(x^4 - x^3 + x^2 + 3x) : (x^2 - 2x + 3) = \frac{x^4 - x^3 + x^2 + 3x}{x^2 - 2x + 3} = x^2 + x$

c)  $(x^2 - y^2 + 6x + 9) : (x + y + 3) = \frac{x^2 - y^2 + 6x + 9}{x + y + 3} = \frac{(x^2 + 6x + 9) - y^2}{x + y + 3}$

$$= \frac{(x + 3)^2 - y^2}{x + y + 3} = \frac{(x + 3 - y)(x + 3 + y)}{x + y + 3} = x - y + 3$$

**Bài 81.** Tìm x, biết:

a)  $\frac{2}{3}x(x^2 - 4) = 0$

b)  $(x + 2)^2 - (x - 2)(x + 2) = 0$

c)  $x + 2\sqrt{2}x^2 + 2x^3 = 0$

**Giải**

a)  $\frac{2}{3}x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x - 2 = 0$

hoặc  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = 2$  hoặc  $x = -2$

b)  $(x + 2)^2 - (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)[(x + 2) - (x - 2)] = 0$   
 $\Leftrightarrow 4(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

c)  $x + 2\sqrt{2}x^2 + 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1 + \sqrt{2}x)^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow (1 + \sqrt{2}x)^2 = 0$  hoặc  $x = 0 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{2}x = 0$  hoặc  $x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

hoặc  $x = 0$

**Bài 82.** chứng minh:

a)  $x^2 - 2xy + y^2 + 1 > 0$  với mọi số thực x và y

b)  $x - x^2 - 1 < 0$  với mọi số thực x

**Giải**

a) Ta có:  $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$  với mọi số thực x và y

$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x - y)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow (x - y)^2 + 1 > 0$  với mọi số thực x và y

b) Ta có:  $x - x^2 - 1 = -(x^2 - x + 1) = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}$

$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4}$  với mọi số thực x



$$\Rightarrow x - x^2 - 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0 \text{ với mọi số thực } x$$

**Bài 83.** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $2n^2 - n + 2$  chia hết cho  $2n + 1$ .

**Giải**

$$\text{Ta có: } (2n^2 - n + 2) : (2n + 1) = \frac{2n^2 - n + 2}{2n + 1} = n - 1 + \frac{3}{2n + 1}$$

Ta có:  $n \in \mathbb{Z}$  và  $2n^2 - n + 2$  chia hết cho  $2n + 1$  thì  $2n + 1$  là ước của 3  
Ước của 3 là  $\pm 1; \pm 3$

$$* \text{ Khi } 2n + 1 = 1 \Leftrightarrow 2n = 0 \Leftrightarrow n = 0$$

$$* \text{ Khi } 2n + 1 = -1 \Leftrightarrow 2n = -2 \Leftrightarrow n = -1$$

$$* \text{ Khi } 2n + 1 = 3 \Leftrightarrow 2n = 2 \Leftrightarrow n = 1$$

$$* \text{ Khi } 2n + 1 = -3 \Leftrightarrow 2n = -4 \Leftrightarrow n = -2$$

Vậy,  $n = 0$  hoặc  $n = -1$  hoặc  $n = 1$  hoặc  $n = -2$ .

## Chương II – PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### §1 . PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

#### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Một **phân thức đại số** (hay nói gọn là **phân thức**) là một biểu thức có dạng  $\frac{A}{B}$ , trong đó A, B là những đa thức và B khác 0.

A được gọi là tử thức (hay tử)

B được gọi là mẫu thức (hay mẫu)

– Mỗi đa thức cũng được coi như một phân thức với mẫu thức bằng 1

– Với hai phân thức  $\frac{A}{B}$  và  $\frac{C}{D}$  ta nói:  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  nếu  $A \cdot D = B \cdot C$

#### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng tỏ rằng:

$$\text{a) } \frac{5y}{7} = \frac{20xy}{28x}$$

$$\text{b) } \frac{3x(x+5)}{2(x+5)} = \frac{3x}{2}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2-1}$$

$$\text{d) } \frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$$\text{e) } \frac{x^3+8}{x^2-2x+4} = x+2$$

**Giải**



$$a) \text{ Ta có } \begin{cases} 5y \cdot 28x = 140xy \\ 7 \cdot 20xy = 140 \end{cases} \Rightarrow 5y \cdot 28x = 7 \cdot 20xy \Rightarrow \frac{5y}{7} = \frac{20xy}{28x}$$

$$b) \text{ Ta có } \begin{cases} 2 \cdot 3x(x+5) = 6x^2 + 30x \\ 3x \cdot 2(x+5) = 6x^2 + 30x \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 3x(x+5) = 3x \cdot 2(x+5) \Rightarrow \frac{3x(x+5)}{2(x+5)} = \frac{3x}{2}$$

$$c) \text{ Ta có } (x+2)(x^2-1) = (x+2)(x-1)(x-1) \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2-1}$$

$$d) \text{ Ta có } \begin{cases} (x^2-x-2)(x-1) = x^3-2x^2-x+2 \\ (x+1)(x^2-3x+2) = x^3-2x^2-x+2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$$e) \text{ Ta có } (x+2)(x^2-2x+4) = x^3+8 \Rightarrow \frac{x^3+8}{x^2-2x+4} = x+2$$

**Bài 2.** Ba phân thức sau có bằng nhau không ?

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2+x}; \frac{x-3}{x}; \frac{x^2-4x+3}{x^2-x}$$

**Giải**

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x^2-2x-3)x = x^3-2x^2-3x \\ (x-3)(x^2+x) = x^3-2x^2-3x \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{x^2+x} = \frac{x-3}{x} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x-3)(x^2-x) = x^3-4x^2+3x \\ (x^2-4x+3)x = x^3-4x^2+3x \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{x} = \frac{x^2-4x+3}{x^2-x} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{x^2-2x-3}{x^2+x} = \frac{x-3}{x} = \frac{x^2-4x+3}{x^2-x}$$

**Bài 3.** Cho ba đa thức:  $x^2-4x$ ,  $x^2+4$ ,  $x^2+4x$ . Hãy chọn đa thức thích hợp trong ba đa thức đó rồi điền vào chỗ trống trong đẳng thức dưới đây:

$$\text{đây: } \frac{\dots}{x^2-16} = \frac{x}{x-4}$$

**Giải**

**Đa thức thích hợp là  $x^2+4x$ .**

## §2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} \quad (M \text{ là một đa thức khác } 0).$$

– Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:



$$\frac{A}{B} = \frac{A : N}{B : N} \quad (N \text{ là một nhân tử chung}).$$

– Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:  $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$

## B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 4.** Cô giáo yêu cầu mỗi bạn cho một ví dụ về hai phân thức bằng nhau. Dưới đây là những ví dụ mà các bạn Lan, Hùng, Giang, Huy đã cho:

$$\frac{x+3}{2x-5} = \frac{x^2+3x}{2x^2-5x} \quad (\text{Lan})$$

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{x+1}{1} \quad (\text{Hùng})$$

$$\frac{4-x}{-3x} = \frac{x-4}{3x} \quad (\text{Giang})$$

$$\frac{(x-9)^3}{2(9-x)} = \frac{(9-x)^2}{2} \quad (\text{Huy})$$

Em hãy dùng tính chất cơ bản của phân thức và quy tắc đổi dấu để giải thích ai viết đúng, ai viết sai. Nếu có chỗ nào sai em hãy sửa lại cho đúng.

### Giải

$$* \frac{x^2+3x}{2x^2-5x} = \frac{x(x+3)}{x(2x-5)} = \frac{x+3}{2x-5}, \text{ bạn Lan đúng}$$

$$* \frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{(x+1)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x} \neq \frac{x+1}{1}, \text{ bạn Hùng sai}$$

$$\text{Sửa lại: } \frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{x+1}{x} \text{ hoặc } = \frac{x^3}{5x(x+5)} + \frac{10(x-5)(x+5)}{5x(x+5)} + \frac{5(50+5x)}{5x(x+5)}$$

$$* \frac{4-x}{-3x} = \frac{-(-4+x)}{-3x} = \frac{-4+x}{3x} = \frac{x-4}{3x}, \text{ bạn Giang đúng}$$

$$* \frac{(x-9)^3}{2(9-x)} = \frac{(x-9)(x-9)^2}{-2(x-9)} = \frac{(x-9)^2}{-2} = \frac{(9-x)^2}{-2} \neq \frac{(9-x)^2}{2}, \text{ bạn Huy sai}$$

$$\text{Sửa lại: } \frac{(x-9)^3}{2(9-x)} = \frac{(9-x)^2}{2} \text{ hoặc } \frac{(x-9)^3}{2(9-x)} = \frac{(9-x)^2}{-2}$$

**Bài 5.** Điền đa thức thích hợp vào mỗi chỗ trống trong các đẳng thức sau:

$$\text{a) } \frac{x^3+x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{\dots}{x-1}$$

$$\text{b) } \frac{5(x+y)}{2} = \frac{5x^2-5y^2}{\dots}$$

### Giải

$$\text{a) } \frac{x^3+x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2}{x-1}. \text{ Đa thức thích hợp là } x^2$$



$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{5x^2 - 5y^2}{P} &= \frac{5(x+y)}{2} \Leftrightarrow \frac{5(x^2 - y^2)}{P} = \frac{5(x+y)}{2} \Leftrightarrow \frac{5(x+y)(x-y)}{P} = \frac{5(x+y)}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{x-y}{P} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P = 2(x-y). \text{ Đa thức thích hợp là } P = 2(x-y) \end{aligned}$$

**Bài 6.** Đố. Hãy dùng tính chất cơ bản của phân thức để điền một đa thức thích hợp vào chỗ trống:

$$\frac{x^5 - 1}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$$

**Giải**

$$\begin{aligned} x^5 - 1 &= x^5 - x^4 + x^4 - 1 = x^4(x-1) + [x^2(x^2 - 1)] = x^4(x-1) + (x^2 - 1)(x^2 + 1) \\ &= x^4(x-1) + (x-1)(x+1)(x^2 + 1) = (x-1)[x^4 + (x+1)(x^2 + 1)] \\ &= (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ \Rightarrow \frac{x^5 - 1}{x^2 - 1} &= \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{P}{x + 1} \\ \Rightarrow P &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \text{ là đa thức thích hợp} \end{aligned}$$

### §3 . RÚT GỌN PHÂN THỨC

#### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Cách biến đổi phân thức thành phân thức đơn giản hơn và bằng phân thức đã cho gọi là rút gọn phân thức.

Muốn rút gọn một phân thức ta có thể làm như sau:

– Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung.

– Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung (nếu có).

#### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 7.** Rút gọn phân thức:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{6x^2y^2}{8xy^5} \quad & \text{b)} \quad \frac{10xy^2(x+y)}{15xy(x+y)^3} \quad & \text{c)} \quad \frac{2x^2 + 2x}{x+1} \quad & \text{d)} \quad \frac{x^2 - xy - x + y}{x^2 + xy - x - y} \end{aligned}$$

**Giải**

$$\text{a)} \quad \frac{6x^2y^2}{8xy^5} = \frac{(2xy^2)3x}{(2xy^2)4y^3} = \frac{3x}{4y^3}$$

$$\text{b)} \quad \frac{10xy^2(x+y)}{15xy(x+y)^3} = \frac{2.(5xy)(x+y)y}{3.(5xy)(x+y)(x+y)^2} = \frac{2y}{3(x+y)^2}$$



$$c) \frac{2x^2 + 2x}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{x+1} = 2x$$

$$d) \frac{x^2 - xy - x + y}{x^2 + xy - x - y} = \frac{x(x-y) - (x-y)}{x(x+y) - (x+y)} = \frac{(x-y)(x-1)}{(x+y)(x-1)} = \frac{x-y}{x+y}$$

**Bài 8.** Trong tờ nháp của một bạn có ghi một số phép rút gọn phân thức như sau:

$$a) \frac{3xy}{9y} = \frac{x}{3}$$

$$b) \frac{3xy + 3}{9y + 3} = \frac{x}{3}$$

$$c) \frac{3xy + 3}{9y + 9} = \frac{x+1}{3+3} = \frac{x+1}{6}$$

$$d) \frac{3xy + 3x}{9y + 9} = \frac{x}{3}$$

Theo em câu nào đúng, câu nào sai? Em hãy giải thích.

**Giải**

$$a) \frac{3xy}{9y} = \frac{(3y)x}{3 \cdot (3y)} = \frac{x}{3} \quad (\text{đúng})$$

$$b) \frac{3xy + 3}{9y + 3} = \frac{3(xy + 1)}{3(3y + 1)} = \frac{xy + 1}{3y + 1} \neq \frac{x}{3} \quad (\text{sai})$$

$$c) \frac{3xy + 3}{9y + 9} = \frac{3(xy + 1)}{9(y + 1)} = \frac{xy + 1}{3(y + 1)} \neq \frac{x+1}{3+3} = \frac{x+1}{6} \quad (\text{sai})$$

$$d) \frac{3xy + 3x}{9y + 9} = \frac{3x(y + 1)}{9(y + 1)} = \frac{x}{3} \quad (\text{đúng})$$

**Bài 9.** Áp dụng quy tắc đổi dấu rồi rút gọn phân thức:

$$a) \frac{36(x-2)^3}{32-16x}$$

$$b) \frac{x^2 - xy}{5y^2 - 5xy}$$

**Giải**

$$a) \frac{36(x-2)^3}{32-16x} = \frac{36(x-2)^3}{16(2-x)} = \frac{9 \cdot 4(x-2)(x-2)^2}{-4 \cdot 4(x-2)} = -\frac{9(x-2)^2}{4}$$

$$b) \frac{x^2 - xy}{5y^2 - 5xy} = \frac{x(x-y)}{5y(y-x)} = \frac{-x(y-x)}{5y(y-x)} = -\frac{x}{5y}$$

**Bài 10.** Đố. Đố em rút gọn được phân thức.

$$\frac{x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$$

**Giải**

$$\begin{aligned} x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= (x^7 + x^6 + x^5 + x^4) + (x^3 + x^2 + x + 1) \\ &= x^4(x^3 + x^2 + x + 1) + (x^3 + x^2 + x + 1) = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 + 1) \\ &= [x^2(x+1) + (x+1)](x^4 + 1) = (x+1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \\ \Rightarrow \frac{x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 1} &= \frac{(x+1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x^2 + 1)(x^4 + 1)}{x-1} \end{aligned}$$



## Luyện tập

Bài 11. Rút gọn phân thức:

$$a) \frac{12x^3y^2}{18xy^5}$$

$$b) \frac{15x(x+5)^3}{20x^2(x+5)}$$

**Giải**

$$a) \frac{12x^3y^2}{18xy^5} = \frac{2 \cdot (6xy^2)x^2}{3 \cdot (6xy^2)y^3} = \frac{2x^2}{3y^3}$$

$$b) \frac{15x(x+5)^3}{20x^2(x+5)} = \frac{3 \cdot 5x(x+5)(x+5)^2}{4 \cdot 5x \cdot x(x+5)} = \frac{3(x+5)^2}{4x}$$

Bài 12. Phân tích tử và mẫu thành nhân tử rồi rút gọn phân thức:

$$a) \frac{3x^2 - 12x + 12}{x^4 - 8x}$$

$$b) \frac{7x^2 + 14x + 7}{3x^2 + 3x}$$

**Giải**

$$a) \frac{3x^2 - 12x + 12}{x^4 - 8x} = \frac{3(x^2 - 4x + 4)}{x(x^3 - 2^3)} = \frac{3(x-2)^2}{x(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{3(x-2)}{x(x^2 + 2x + 4)}$$

$$b) \frac{7x^2 + 14x + 7}{3x^2 + 3x} = \frac{7(x^2 + 2x + 1)}{3x(x+1)} = \frac{7(x+1)^2}{3x(x+1)} = \frac{7(x+1)}{3x}$$

Bài 13. Áp dụng quy tắc đổi dấu rồi rút gọn phân thức:

$$a) \frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3}$$

$$b) \frac{y^2 - x^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$$

**Giải**

$$a) \frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3} = \frac{-3 \cdot 15x(x-3)}{15x(x-3)^3} = -\frac{3}{(x-3)^2}$$

$$b) \frac{y^2 - x^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3} = \frac{(y-x)(y+x)}{(x-y)^3} = \frac{-(x-y)(y+x)}{(x-y)^3} = -\frac{x+y}{(x-y)^2}$$

## §4. QUY ĐỒNG MẪU THỨC NHIỀU PHÂN THỨC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Biến đổi nhiều phân thức có mẫu thức khác nhau thành những phân thức tương ứng bằng chung và có cùng một mẫu thức gọi là **quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức**.

Muốn quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức ta có thể làm như sau:

- Tìm mẫu thức chung (MTC)
- Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức
- Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

**Chú ý:** \* Muốn tìm MTC của nhiều phân thức ta nên:

- Phân tích các mẫu thức thành nhân tử



– Chọn một tích gồm một số chia hết các nhân tử bằng số ở các mẫu thức (nếu các nhân tử phụ này là các số nguyên thì số đó là BCNN của chúng), với mỗi cơ số của lũy thừa có mặt trong các mẫu thức ta lấy lũy thừa với số mũ cao nhất.

\* Muốn tìm nhân tử phụ tương ứng của mỗi phân thức: Ta chia MTC cho mẫu thức của phân thức đó.

## B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 14.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a)  $\frac{5}{x^5y^3}, \frac{7}{12x^3y^4}$

b)  $\frac{4}{15x^3y^5}, \frac{11}{12x^4y^2}$

**Giải**

a) MTC =  $12x^5y^4$

$$\frac{5}{x^5y^3} = \frac{5 \cdot 12y}{12x^5y^4} = \frac{60y}{12x^5y^4} \quad \text{và} \quad \frac{7}{12x^3y^4} = \frac{7x^2}{12x^5y^4}$$

b) BCNN(15, 12) = 60 và MTC =  $60x^4y^5$

$$\frac{4}{15x^3y^5} = \frac{4 \cdot 4x}{60x^4y^5} = \frac{16x}{60x^4y^5} \quad \text{và} \quad \frac{11}{12x^4y^2} = \frac{11 \cdot 5y^3}{60x^4y^5} = \frac{55y^3}{60x^4y^5}$$

**Bài 15.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a)  $\frac{5}{2x+6}, \frac{3}{x^2-9}$

b)  $\frac{2x}{x^2-8x+16}, \frac{x}{3x^2-12x}$

**Giải**

a) Ta có:  $2x+6 = 2(x+3)$  và  $x^2-9 = (x-3)(x+3)$

MTC =  $2(x^2-9) = 2(x+3)(x-3)$

$$\frac{5}{2x+6} = \frac{5(x-3)}{2(x+3)(x-3)} \quad \text{và} \quad \frac{3}{x^2-9} = \frac{2 \cdot 3}{2(x-3)(x+3)} = \frac{6}{2(x-3)(x+3)}$$

b) Ta có:  $x^2-8x+16 = (x-4)^2$  và  $3x^2-12x = 3x(x-4)$

MTC =  $3x(x-4)^2$

$$\frac{2x}{x^2-8x+16} = \frac{2x}{(x-4)^2} = \frac{2x \cdot 3x}{3x(x-4)^2} = \frac{6x^2}{3x(x-4)^2}$$

$$\frac{x}{3x^2-12x} = \frac{x}{3x(x-4)} = \frac{x(x-4)}{3x(x-4)^2}$$

**Bài 16.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau (có thể áp dụng quy tắc đổi dấu đối với một phân thức để tìm mẫu thức chung thuận tiện hơn):

a)  $\frac{4x^2-3x+5}{x^3-1}, \frac{1-2x}{x^2+x+1}, -2$

b)  $\frac{10}{x+2}, \frac{5}{2x-4}, \frac{1}{6-3x}$

**Giải**

a) Ta có:  $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$  nên MTC =  $(x-1)(x^2+x+1)$



$$\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^3 - 1} = \frac{4x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\frac{1-2x}{x^2 + x + 1} = \frac{(x-1)(1-2x)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$-2 = \frac{-2(x^3 - 1)}{x^3 - 1} = \frac{-2(x^3 - 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x+2 \\ b) \text{ Ta có: } 2x-4 = 2(x-2) \\ 6-3x = -3(x-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{MTC} = 6(x-2)(x+2)$$

$$\frac{10}{x+2} = \frac{10 \cdot 6(x-2)}{6(x+2)(x-2)} = \frac{60(x-2)}{6(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{5}{2x-4} = \frac{5}{2(x-2)} = \frac{5 \cdot 3(x+2)}{6(x-2)(x+2)} = \frac{15(x+2)}{6(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{1}{6-3x} = -\frac{1}{3(x-2)} = -\frac{2(x+2)}{6(x-2)(x+2)}$$

**Bài 17.** Đố. Cho hai phân thức:  $\frac{5x^2}{x^3 - 6x^2}$ ,  $\frac{3x^2 + 18x}{x^2 - 36}$ .

Khi quy đồng mẫu thức, bạn Tuấn đã chọn  $\text{MTC} = x^2(x-6)(x+6)$ , còn bạn Lan bảo rằng: “Quá đơn giản!  $\text{MTC} = x-6$ ”. Đố em biết bạn nào chọn đúng?

**Giải**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ta có } x^3 - 6x^2 = x^2(x-6) \\ x^2 - 36 = (x-6)(x+6) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{MTC} = x^2(x-6)(x+6), \text{ bạn Tuấn}$$

chọn đúng

$$\text{Ta có: } \frac{5x^2}{x^3 - 6x^2} = \frac{5x^2}{x^2(x-6)} = \frac{5}{x-6} \text{ và } \frac{3x^2 + 18x}{x^2 - 36} = \frac{3x(x+6)}{(x-6)(x+6)} = \frac{3x}{x-6}$$

$\Rightarrow \text{MTC} = x-6$ , bạn Lan cũng chọn đúng

**Luyện tập**

**Bài 18.** Quy đồng mẫu thức hai phân thức:

a)  $\frac{3x}{2x+4}$  và  $\frac{x+3}{x^2-4}$

b)  $\frac{x+5}{x^2+4x+4}$  và  $\frac{x}{3x+6}$

**Giải**

a)  $\text{MTC} = 2(x-2)(x+2)$

$$\left( \frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} \right) : \frac{4x}{10x-5} = \left[ \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} \right] \cdot \frac{10x-5}{4x}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{2(x+3)}{2(x-2)(x+2)} = \frac{2x+6}{2(x-2)(x+2)}$$



b)  $MTC = 3(x+2)^2$

$$\frac{x+5}{x^2+4x+4} = \frac{3(x+5)}{3(x+2)^2} = \frac{3x+15}{3(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{3x+6} = \frac{x}{3(x+2)} = \frac{x(x+2)}{3(x+2)^2} = \frac{x^2+2x}{3(x+2)^2}$$

**Bài 19.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a)  $\frac{1}{x+2}, \frac{8}{2x-x^2}$     b)  $x^2+1, \frac{x^4}{x^2-1}$

c)  $\frac{x^3}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}, \frac{x}{y^2-xy}$

**Giải**

a)  $\left. \begin{array}{l} x+2 \\ 2x-x^2 = -x(x-2) \end{array} \right\} \Rightarrow MTC = x(x+2)(x-2)$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{x(x-2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x}{x(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{8}{2x-x^2} = -\frac{8}{x(x-2)} = -\frac{8(x+2)}{x(x-2)(x+2)}$$

**Bài 20.** Cho hai phân thức:  $\frac{1}{x^2+3x-10}, \frac{x}{x^2+7x+10}$

Không dùng cách phân tích các mẫu thức thành nhân tử, hãy chứng tỏ rằng có thể quy đồng mẫu thức hai phân thức này với mẫu thức chung là  $x^3+5x^2-4x-20$

**Giải**

Ta có:  $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10} = x+2$  và  $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+7x+10} = x-2$

$\Rightarrow x^3+5x^2-4x-20$  là MTC của hai phân thức

$$\frac{1}{x^2+3x-10}, \frac{x}{x^2+7x+10}$$

$$\frac{1}{x^2+3x-10} = \frac{x+2}{(x^2+3x-10)(x+2)} = \frac{x+2}{x^3+5x^2-4x-20}$$

$$\frac{x}{x^2+7x+10} = \frac{x(x-2)}{(x^2+7x+10)(x-2)} = \frac{x^2-2x}{x^3+5x^2-4x-20}$$



## §5. PHÉP CỘNG CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu thức ta cộng các tử thức với nhau, giữ nguyên mẫu thức rồi rút gọn phân thức vừa tìm được.
- Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức cùng mẫu thức vừa tìm được.

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 21.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{3x-5}{7} + \frac{4x+5}{7} \quad \text{b) } \frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3} \quad \text{c) } \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5}$$

**Giải**

$$\text{a) } \frac{3x-5}{7} + \frac{4x+5}{7} = \frac{3x-5+4x+5}{7} = \frac{7x}{7} = x$$

$$\text{b) } \frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3} = \frac{5xy-4y+3xy+4y}{2x^2y^3} = \frac{8xy}{2x^2y^3} = \frac{4}{xy^2}$$

$$\text{c) } \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5} = \frac{x+1+x-18+x+2}{x-5} = \frac{3x-15}{x-5} = \frac{3(x-5)}{x-5} = 3$$

**Bài 22.** Áp dụng quy tắc đổi dấu để các phân thức có cùng mẫu thức rồi làm tính cộng phân thức:

$$\text{a) } \frac{2x^2-x}{x-1} + \frac{x+1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x-1} \quad \text{b) } \frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3}$$

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2x^2-x}{x-1} + \frac{x+1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x-1} &= \frac{2x^2-x}{x-1} + \frac{-(x+1)}{x-1} + \frac{2-x^2}{x-1} \\ &= \frac{2x^2-x-(x+1)+2-x^2}{x-1} = \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3} &= \frac{4-x^2}{x-3} + \frac{-(2x-2x^2)}{x-3} + \frac{5-4x}{x-3} \\ &= \frac{4-x^2-(2x-2x^2)+5-4x}{x-3} = \frac{x^2-6x+9}{x-3} = \frac{(x-3)^2}{x-3} = x-3 \end{aligned}$$

**Bài 23.** Làm các phép tính sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{y}{2x^2-xy} + \frac{4x}{y^2-2xy} \quad & \text{b) } \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2-4} + \frac{x-14}{(x^2+4x+4)(x-2)} \\ \text{c) } \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)} \quad & \text{d) } \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+3)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)} \end{aligned}$$

**Giải**

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} 2x^2-xy &= x(2x-y) \\ y^2-2xy &= -y(2x-y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{MTC} = xy(2x-y)$$



$$\begin{aligned}\frac{2x-7}{10x-4} - \frac{3x+5}{4-10x} &= \frac{2x-7}{10x-4} + \frac{3x+5}{10x-4} = \frac{2x-7+3x+5}{10x-4} = \frac{5x-2}{10x-4} = \frac{5x-2}{2(2x-2)} = \frac{1}{2} \\ &= \frac{(y-2x)(y+2x)}{xy(2x-y)} = \frac{-(y+2x)}{xy} = -\frac{2x+y}{xy}\end{aligned}$$

b) Ta có:  $(x^2 + 4x + 4)(x - 2) = (x + 2)^2(x - 2)$  nên  $MTC = (x + 2)^2(x - 2)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2-4} + \frac{x-14}{(x^2+4x+4)(x-2)} &= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2(x-2)} + \frac{3(x+2)}{(x+2)^2(x-2)} + \frac{x-14}{(x+2)^2(x-2)} \\ &= \frac{x^2-4+3x+6+x-14}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{x^2+4x-12}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{(x^2+4x+4)-16}{(x+2)^2(x-2)} \\ &= \frac{(x+2)^2-4^2}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{(x+2+4)(x+2-4)}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{(x+6)(x-2)}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{x+6}{(x+2)^2}\end{aligned}$$

c)  $MTC = (x + 2)(4x + 7)$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)} = \frac{4x+7}{(x+2)(4x+7)} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)} = \frac{4(x+2)}{(x+2)(4x+7)} = \frac{4}{4x+7}$$

d)  $MTC = (x + 2)(x + 3)(4x + 7)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+3)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)} &= \frac{(x+2)(4x+7) + 4x+7 + x+3}{(x+2)(x+3)(4x+7)} \\ &= \frac{4x^2+15x+14+4x+7+x+3}{(x+2)(x+3)(4x+7)} = \frac{4x^2+20x+24}{(x+2)(x+3)(4x+7)} = \frac{4(x^2+5x+6)}{(x+2)(x+3)(4x+7)} \\ &= \frac{4(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(4x+7)} = \frac{4}{4x+7}\end{aligned}$$

**Bài 24.** Một con mèo đuổi bắt một con chuột. Lần đầu mèo chạy với vận tốc  $x$  m/s. Chạy được 3m thì mèo bắt chuột. Mèo vờn chuột 40 giây rồi thả cho chuột chạy. Sau đó 15 giây mèo lại đuổi bắt, nhưng với vận tốc nhỏ hơn vận tốc ban đầu là 0,5 m/s. Chạy được 5m mèo lại bắt được chuột. Lần này thì mèo cắn chết chuột, Cuộc săn đuổi kết thúc.

Hãy biểu diễn qua  $x$ :

- Thời gian lần thứ nhất mèo đuổi bắt được chuột
- Thời gian lần thứ hai mèo đuổi bắt được chuột
- Thời gian kể từ đầu đến khi kết thúc cuộc săn.

**Giải**

Thời gian lần thứ nhất mèo đuổi bắt được chuột thì  $\pm 1$  (giây)

Vận tốc mèo đuổi chuột lần hai:  $x - 0,5$  (m/s)

Thời gian lần thứ nhất mèo đuổi bắt được chuột thì  $t_2 = \frac{5}{x-0,5}$  (giây)

Thời gian mèo vờn chuột 40 giây rồi và sau đó 15 giây mèo lại đuổi bắt

$$t_3 = 40 + 15 = 55 \text{ (giây)}$$

Thời gian kể từ đầu đến khi kết thúc cuộc săn:



$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3}{x} + \frac{5}{x-0,5} + 55 \text{ (giây)}$$

### Luyện tập

**Bài 25.** Làm tính cộng các phân thức sau:

a)  $\frac{5}{2x^2y} + \frac{3}{5xy^2} + \frac{x}{y^3}$

b)  $\frac{x+1}{2x+6} + \frac{2x+3}{x(x+3)}$

c)  $\frac{3x+5}{x^2-5x} + \frac{25-x}{25-5x}$

d)  $x^2 + \frac{x^4+1}{1-x^2} + 1$

e)  $\frac{4x^2-3x+17}{x^3-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{6}{1-x}$

### Giải

a) MTC =  $10x^2y^3$

$$\frac{5}{2x^2y} + \frac{3}{5xy^2} + \frac{x}{y^3} = \frac{5 \cdot 5y^2}{10x^2y^3} + \frac{3 \cdot 2xy}{10x^2y^3} + \frac{10x^2 \cdot x}{10x^2y^3} = \frac{25y^2 + 6xy + 10x^3}{10x^2y^3}$$

b) MTC =  $2x(x+3)$

$$\frac{x+1}{2x+6} + \frac{2x+3}{x(x+3)} = \frac{x(x+1)}{2x(x+3)} + \frac{2(2x+3)}{2x(x+3)} = \frac{x^2+x+4x^2+6}{2x(x+3)} = \frac{5x^2+x+6}{2x(x+3)}$$

c) MTC =  $5x(x-5)$

$$\begin{aligned} \frac{3x+5}{x^2-5x} + \frac{25-x}{25-5x} &= \frac{3x+5}{x(x-5)} + \frac{25-x}{-5(x-5)} = \frac{5(3x+5)}{5x(x-5)} + \frac{(-x)(25-x)}{5x(x-5)} \\ &= \frac{5(3x+5) + (-x)(25-x)}{5x(x-5)} = \frac{15x+25-25x+x^2}{5x(x-5)} = \frac{x^2-10x+25}{5x(x-5)} = \frac{(x-5)^2}{5x(x-5)} = \frac{x-5}{5x} \end{aligned}$$

d) MTC =  $1-x^2$

$$x^2 + \frac{x^4+1}{1-x^2} + 1 = \frac{x^4+1}{1-x^2} + 1 + x^2 = \frac{x^4+1}{1-x^2} + \frac{(1+x^2)(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{x^4+1+1-x^4}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}$$

e) MTC =  $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2-3x+17}{x^3-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{6}{1-x} &= \frac{4x^2-3x+17}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{6}{1-x} \\ &= \frac{4x^2-3x+17}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{(-6)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{4x^2-3x+17+2x^2-3x+1-6x^2-6x-6}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{-12x+12}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-12(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-12}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

**Bài 26.** Một đội máy xúc trên công trường đường Hồ Chí Minh nhận nhiệm vụ xúc  $11600 \text{ m}^3$  đất. Giai đoạn đầu còn nhiều khó khăn nên máy làm việc với năng suất trung bình  $x \text{ m}^3/\text{ngày}$  và đội đào được  $5000 \text{ m}^3$ . Sau đó công việc ổn định hơn, năng suất của máy tăng  $25 \text{ m}^3/\text{ngày}$ .



a) Hãy biểu diễn

- Thời gian xúc 5000 m<sup>3</sup> đầu tiên.
  - Thời gian làm nốt phần việc còn lại
  - Thời gian làm việc để hoàn thành công việc.
- b) Tính thời gian làm việc để hoàn thành công việc với  $x = 250\text{m}^3/\text{ngày}$

**Giải**

a) Thời gian xúc 5000 m<sup>3</sup> đầu tiên là  $t_1 = \frac{5000}{x}$  (ngày)

Khối lượng công việc còn lại:  $11600 - 5000 = 6600$  (m<sup>3</sup>)

Năng suất xuất của máy:  $x + 25$  (m<sup>3</sup>/ngày)

Thời gian làm nốt phần việc còn lại là  $t_2 = \frac{6600}{x + 25}$  (ngày)

Thời gian hoàn thành công việc:  $t = t_1 + t_2 = \frac{5000}{x} + \frac{6600}{x + 25}$  (ngày)

b) Với  $x = 250\text{m}^3/\text{ngày}$ , thời gian hoàn thành công việc:

$$t = \frac{5000}{250} + \frac{6600}{250 + 25} = 20 + 24 = 44 \text{ (ngày)}$$

**Bài 27.** Đố. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

$$\frac{x^2}{5x + 25} + \frac{2(x - 5)}{x} + \frac{50 + 5x}{x(x + 5)} \quad \text{tại } x = -4$$

Nếu coi tử số của phân số tối giản mà em tìm được là ngày còn mẫu số là tháng thì đó chính là một ngày lễ trên thế giới. Đố em biết đó là ngày gì?

**Giải**

$$MTC = 5x(x + 5)$$

$$P = \frac{x^2}{5x + 25} + \frac{2(x - 5)}{x} + \frac{50 + 5x}{x(x + 5)} = \frac{x^2}{5(x + 5)} + \frac{2(x - 5)}{x} + \frac{50 + 5x}{x(x + 5)}$$

$$= \frac{x^3}{5x(x + 5)} + \frac{10(x - 5)(x + 5)}{5x(x + 5)} + \frac{5(50 + 5x)}{5x(x + 5)}$$

$$= \frac{x^3 + 10(x^2 - 25) + 250 + 25x}{5x(x + 5)} = \frac{x^3 + 10x^2 + 25x}{5x(x + 5)}$$

$$= \frac{x(x^2 + 10x + 25)}{5x(x + 5)} = \frac{x(x + 5)^2}{5x(x + 5)} = \frac{x + 5}{5}$$

$$\text{Tại } x = -4 \text{ thì } P = \frac{-4 + 5}{5} = \frac{1}{5}$$

Nếu coi tử số của phân số tìm được là ngày (ngày 1) còn mẫu số là tháng (tháng 5) thì đó chính là một ngày lễ trên thế giới.

**Ngày quốc tế lao động**



## §6. PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

\* Hai phân thức được gọi là **đối nhau** nếu tổng của chúng bằng 0. Phân thức đối của phân thức  $\frac{A}{B}$  là phân thức  $-\frac{A}{B}$ .

\* Muốn trừ phân thức  $\frac{A}{B}$  cho phân thức  $\frac{C}{D}$ , ta cộng  $\frac{A}{B}$  với phân thức đối của  $\frac{C}{D}$  nên  $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right)$

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 28.** Theo quy tắc đổi dấu ta có  $-\frac{A}{B} = \frac{A}{-B}$ . Do đó ta cũng có  $-\frac{A}{B} = \frac{A}{-B}$

Chẳng hạn, phân thức đối của  $\frac{4}{5-x}$  là  $-\frac{4}{5-x} = \frac{4}{-(5-x)} = \frac{4}{x-5}$ . Áp

dụng điều này hãy điền những phân thức thích hợp vào những chỗ trống dưới đây:

a)  $-\frac{x^2+2}{1-5x} = \dots = \dots$

b)  $-\frac{4x+1}{5-x} = \dots$

**Giải**

a)  $-\frac{x^2+2}{1-5x} = \frac{x^2+2}{-(1-5x)} = \frac{x^2+2}{5x-1}$

b)  $-\frac{4x+1}{5-x} = \frac{4x+1}{-(5-x)} = \frac{4x+1}{x-5}$

**Bài 29.** Làm tính trừ các phân thức sau:

a)  $\frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y}$

b)  $\frac{4x+5}{2x-1} - \frac{5-9x}{2x-1}$

c)  $\frac{11x}{2x-3} - \frac{x-18}{3-2x}$

d)  $= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)xy^2}{xy^2(x^2-xy+y^2)} = x+y$

**Giải**

a)  $\frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y} = \frac{4x-1}{3x^2y} + \frac{-(7x-1)}{3x^2y} = \frac{4x-1-(7x-1)}{3x^2y} = \frac{-3x}{3x^2y} = -\frac{1}{xy}$

b)  $\frac{4x+5}{2x-1} - \frac{5-9x}{2x-1} = \frac{4x+5}{2x-1} + \frac{-(5-9x)}{2x-1} = \frac{4x+5-(5-9x)}{2x-1} = \frac{13x}{2x-1}$

c)  $\frac{11x}{2x-3} - \frac{x-18}{3-2x} = \frac{11x}{2x-3} + \frac{x-18}{2x-3} = \frac{11x+x-18}{2x-3} = \frac{12x-18}{2x-3} = \frac{6(2x-3)}{2x-3} = 6$

d)  $\frac{2x-7}{10x-4} - \frac{3x+5}{4-10x} = \frac{2x-7}{10x-4} + \frac{3x+5}{10x-4} = \frac{2x-7+3x+5}{10x-4} = \frac{5x-2}{10x-4} = \frac{5x-2}{2(2x-2)} = \frac{1}{2}$

**Bài 30.** Thực hiện các phép tính sau:



$$a) \frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x}$$

$$b) x^2 + 1 - \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

**Giải**

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x} = \frac{3}{2(x+3)} - \frac{x-6}{2x(x+3)} = \frac{3x}{2x(x+3)} - \frac{x-6}{2x(x+3)} \\ & = \frac{3x - (x-6)}{2x(x+3)} = \frac{3x - x + 6}{2x(x+3)} = \frac{2x+6}{2x(x+3)} = \frac{2(x+3)}{2x(x+3)} = \frac{1}{x} \\ b) \quad & x^2 + 1 - \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} - \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2-1} = \frac{x^4-1}{x^2-1} - \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2-1} \\ & = \frac{x^4-1 - (x^4 - 3x^2 + 2)}{x^2-1} = \frac{x^4-1-x^4+3x^2-2}{x^2-1} = \frac{3(x^2-1)}{x^2-1} = 3 \end{aligned}$$

**Bài 31.** Chứng tỏ rằng mỗi hiệu sau đây bằng một phân thức có tử bằng 1:

$$a) \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$b) \frac{1}{xy-x^2} - \frac{1}{y^2-xy}$$

**Giải**

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} \\ b) \quad & \frac{1}{xy-x^2} - \frac{1}{y^2-xy} = \frac{1}{x(y-x)} - \frac{1}{y(y-x)} = \frac{y}{xy(y-x)} - \frac{x}{xy(y-x)} = \frac{y-x}{xy(y-x)} = \frac{1}{xy} \end{aligned}$$

**Bài 32.** Đố em tính nhanh được tổng sau:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)}$$

**Giải**

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}; \quad \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}; \quad \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}; \quad \frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} = \frac{x+6-x}{x(x+6)} = \frac{6}{x(x+6)} \end{aligned}$$



### Luyện tập

**Bài 33.** Làm các phép tính sau:

$$a) \frac{4xy - 5}{10x^3y} - \frac{6y^2 - 5}{10x^3y}$$

$$b) \frac{7x + 6}{2x(x + 7)} - \frac{3x + 6}{2x^2 + 14x}$$

**Giải**

$$a) \frac{4xy - 5}{10x^3y} - \frac{6y^2 - 5}{10x^3y} = \frac{4xy - 5 - (6y^2 - 5)}{10x^3y} = \frac{4xy - 5 - 6y^2 + 5}{10x^3y} = \frac{4xy - 6y^2}{10x^3y} \\ = \frac{2y(2x - 3y)}{10x^3y} = \frac{2x - 3y}{5x^3}$$

$$b) \frac{7x + 6}{2x(x + 7)} - \frac{3x + 6}{2x^2 + 14x} = \frac{7x + 6}{2x(x + 7)} - \frac{3x + 6}{2x(x + 7)} = \frac{7x + 6 - (3x + 6)}{2x(x + 7)} \\ = \frac{7x + 6 - 3x - 6}{2x(x + 7)} = \frac{4x}{2x(x + 7)} = \frac{2}{x + 7}$$

**Bài 34.** Dùng quy tắc đổi dấu rồi thực hiện các phép tính:

$$a) \frac{4x + 13}{5x(x - 7)} - \frac{x - 48}{5x(7 - x)}$$

$$b) \frac{1}{x - 5x^2} - \frac{25x - 15}{25x^2 - 1}$$

**Giải**

$$a) \frac{4x + 13}{5x(x - 7)} - \frac{x - 48}{5x(7 - x)} = \frac{4x + 13}{5x(x - 7)} - \frac{x - 48}{(-5x)(x - 7)} = \frac{4x + 13}{5x(x - 7)} + \frac{x - 48}{5x(x - 7)} \\ = \frac{4x + 13 + x - 48}{5x(x - 7)} = \frac{5x - 35}{5x(x - 7)} = \frac{5(x - 7)}{5x(x - 7)} = \frac{1}{x}$$

$$b) \frac{1}{x - 5x^2} - \frac{25x - 15}{25x^2 - 1} = \frac{1}{x(1 - 5x)} - \frac{25x - 15}{(5x - 1)(5x + 1)} = \frac{1}{x(1 - 5x)} + \frac{25x - 15}{(1 - 5x)(5x + 1)} \\ = \frac{5x + 1}{x(1 - 5x)(5x + 1)} + \frac{x(25x - 15)}{x(1 - 5x)(5x + 1)} = \frac{5x + 1 + x(25x - 15)}{x(1 - 5x)(5x + 1)} \\ = \frac{5x + 1 + 25x^2 - 15x}{x(1 - 5x)(5x + 1)} = \frac{25x^2 - 10x + 1}{x(1 - 5x)(5x + 1)} = \frac{(1 - 5x)^2}{x(1 - 5x)(5x + 1)} = \frac{1 - 5x}{x(5x + 1)}$$

**Bài 35.** Thực hiện các phép tính:

$$a) \frac{x + 1}{x - 3} - \frac{1 - x}{x + 3} - \frac{2x(1 - x)}{9 - x^2}$$

$$b) \frac{3x + 1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 1} + \frac{x + 3}{1 - x^2}$$

**Giải**

$$a) \text{MTC} = (x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$$

$$\frac{x + 1}{x - 3} - \frac{1 - x}{x + 3} - \frac{2x(1 - x)}{9 - x^2} = \frac{x + 1}{x - 3} - \frac{1 - x}{x + 3} + \frac{2x(1 - x)}{x^2 - 9} \\ = \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} - \frac{(1 - x)(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} + \frac{2x(1 - x)}{x^2 - 9} = \frac{(x + 1)(x + 3) - (1 - x)(x - 3) + 2x(1 - x)}{(x - 3)(x + 3)}$$



$$= \frac{x^2 + 4x + 3 - (-x^2 + 4x - 3) + 2x - 2x^2}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 3 + x^2 - 4x + 3 + 2x - 2x^2}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{2x + 6}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2}{x-3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{3x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x+3}{1-x^2} = \frac{3x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{3x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} \\ & = \frac{(3x+1)(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} - \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} \\ & = \frac{(3x+1)(x+1) - (x-1)^2 - (x+3)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} \\ & = \frac{3x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1 - x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x+1)} \\ & = \frac{3x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1 - x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x+1)} \end{aligned}$$

**Bài 36.** Một công ti may phải sản xuất 10000 sản phẩm trong x ngày. Khi thực hiện không những làm xong sớm 1 ngày mà còn làm thêm được 80 sản phẩm.

a) Hãy biểu diễn qua x:

- Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch;
- Số sản phẩm thực tế đã làm được trong một ngày
- Số sản phẩm làm thêm trong một ngày.

b) Tính số sản phẩm làm thêm trong một ngày với x = 25.

**Giải**

a) Hãy biểu diễn qua x

Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch:

$$\frac{10000}{x} \quad (\text{sản phẩm})$$

Công ti làm xong sớm 1 ngày mà còn làm thêm được 80 sản phẩm nên số sản phẩm thực tế đã làm được trong một ngày:

$$\frac{10000 + 80}{x-1} = \frac{10080}{x-1} \quad (\text{sản phẩm})$$

Số sản phẩm làm thêm trong một ngày:  $\frac{10080}{x-1} - \frac{10000}{x}$  (sản phẩm)

b) Số sản phẩm làm thêm trong một ngày với x = 25 là P

$$P = \frac{10080}{25-1} - \frac{10000}{25} = \frac{10080}{24} - \frac{10000}{25} = 420 - 400 = 20 \quad (\text{sản phẩm})$$



**Bài 37. Đối.** Cho phân thức  $\frac{2x+1}{x^2-3}$ . Đối em tìm được một phân thức mà khi lấy phân thức đã cho trừ đi phân thức phải tìm thì được một phân thức bằng phân thức đối của phân thức đã cho.

**Giải**

Gọi P là phân thức phải tìm, ta có:  $\frac{2x+1}{x^2-3} - P = -\frac{2x+1}{x^2-3}$

$$\Rightarrow P = \frac{2x+1}{x^2-3} + \frac{2x+1}{x^2-3} = \frac{4x+2}{x^2-3}$$

## §7. PHÉP NHÂN CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Muốn nhân hai phân thức ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau, rồi rút gọn phân thức vừa tìm được:  $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 38.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{15x}{7y^3} \cdot \frac{2y^2}{x^2}$

b)  $\frac{4y^2}{11x^4} \cdot \left(-\frac{3x^2}{8y}\right)$

c)  $\frac{x^3-8}{5x+20} \cdot \frac{x^2+4x}{x^2+2x+4}$

**Giải**

a)  $\frac{15x}{7y^3} \cdot \frac{2y^2}{x^2} = \frac{15x \cdot 2y^2}{7y^3 \cdot x^2} = \frac{30xy^2}{7x^2y^3} = \frac{30}{7xy}$

b)  $\frac{4y^2}{11x^4} \cdot \left(-\frac{3x^2}{8y}\right) = -\frac{4y^2 \cdot 3x^2}{11x^4 \cdot 8y} = -\frac{3y}{22x^2}$

c)  $\frac{x^3-8}{5x+20} \cdot \frac{x^2+4x}{x^2+2x+4} = \frac{(x^3-2^3)x(x+4)}{5(x+4)(x^2+2x+4)} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)x(x+4)}{5(x+4)(x^2+2x+4)}$   
 $= \frac{(x-2)x}{5} = \frac{x^2-2x}{5}$

**Bài 39.** Thực hiện các phép tính sau (chú ý về dấu):

a)  $\frac{5x+10}{4x-8} \cdot \frac{4-2x}{x+2}$

b)  $\frac{x^2-36}{2x+10} \cdot \frac{3}{6-x}$

**Giải**

a)  $\frac{5x+10}{4x-8} \cdot \frac{4-2x}{x+2} = \frac{5(x+2)2(2-x)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{5(x+2)2(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{5}{2}$

b)  $\frac{x^2-36}{2x+10} \cdot \frac{3}{6-x} = \frac{(x^2-6^2)3}{2(x+5)(6-x)} = -\frac{(x+6)(x-6)3}{2(x+5)(x-6)} = -\frac{3(x+6)}{2(x+5)}$



**Bài 40.** Rút gọn biểu thức sau theo hai cách (sử dụng và không sử dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng)

$$\frac{x-1}{x} \cdot \left( x^2 + x + 1 + \frac{x^3}{x-1} \right)$$

**Giải**

\* Rút gọn trực tiếp.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} \cdot \left( x^2 + x + 1 + \frac{x^3}{x-1} \right) &= \frac{x-1}{x} \left[ \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + x^3}{x-1} \right] = \frac{x-1}{x} \cdot \left( \frac{x^3 - 1 + x^3}{x-1} \right) \\ &= \frac{x-1}{x} \cdot \frac{2x^3 - 1}{x-1} = \frac{(x-1)(2x^3 - 1)}{x(x-1)} = \frac{2x^3 - 1}{x} \end{aligned}$$

\* Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} \cdot \left( x^2 + x + 1 + \frac{x^3}{x-1} \right) &= \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x} + \frac{(x-1)x^3}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^3 - 1}{x} + \frac{x^3}{x} = \frac{x^3 - 1 + x^3}{x} = \frac{2x^3 - 1}{x} \end{aligned}$$

**Bài 41. Đố.** Đố em điền được vào chỗ trống của dãy phép nhân dưới đây những phân thức có mẫu thức bằng tử thức cộng với 1:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \dots = \frac{1}{x+7}$$

**Giải**

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x+5} \cdot \frac{x+5}{x+6} \cdot \frac{x+6}{x+7} = \frac{1}{x+7}$$

## §8 . PHÉP CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hai phân thức được coi là **nghịch đảo nhau** nếu tích của chúng bằng 1.

Phân thức nghịch đảo của phân thức  $\frac{A}{B}$  là phân thức  $\frac{B}{A}$ .

Muốn chia phân thức  $\frac{A}{B}$  cho phân thức  $\frac{C}{D}$  khác 0, ta nhân  $\frac{A}{B}$  với phân thức **nghịch đảo** của  $\frac{C}{D}$  tức là  $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$  với  $\frac{C}{D} \neq 0$ .



## B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 42.** Làm tính chia phân thức:

$$a) \left(-\frac{20x}{3y^2}\right) : \left(-\frac{4x^3}{5y}\right)$$

$$b) \frac{4x+12}{(x+4)^2} : \frac{3(x+3)}{x+4}$$

**Giải**

$$a) \left(-\frac{20x}{3y^2}\right) : \left(-\frac{4x^3}{5y}\right) = \left(-\frac{20x}{3y^2}\right) \cdot \left(-\frac{5y}{4x^3}\right) = \frac{20x \cdot 5y}{3y^2 \cdot 4x^3} = \frac{25}{3x^2y}$$

$$b) \frac{4x+12}{(x+4)^2} : \frac{3(x+3)}{x+4} = \frac{4x+12}{(x+4)^2} \cdot \frac{x+4}{3(x+3)} = \frac{4(x+3)(x+4)}{3(x+4)^2(x+3)} = \frac{4}{3(x+4)}$$

**Bài 43.** Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \frac{5x-10}{x^2+7} : (2x-4)$$

$$b) (x^2-25) : \frac{2x+10}{3x-7}$$

$$c) \frac{x^2+x}{5x^2-10x+5} : \frac{3x+3}{5x-5}$$

**Giải**

$$a) \frac{5x-10}{x^2+7} : (2x-4) = \frac{5x-10}{x^2+7} \cdot \frac{1}{2x-4} = \frac{5(x-2)}{2(x^2+7)(x-2)} = \frac{5}{2(x^2+7)}$$

$$b) (x^2-25) : \frac{2x+10}{3x-7} = (x^2-25) \cdot \frac{3x-7}{2x+10} = \frac{(x-5)(x+5)(3x-7)}{2(x+5)} = \frac{(x-5)(3x-7)}{2}$$

$$c) \frac{x^2+x}{5x^2-10x+5} : \frac{3x+3}{5x-5} = \frac{x(x+1)}{5(x^2-2x+1)} \cdot \frac{5(x-1)}{3(x+1)} = \frac{5x(x+1)(x-1)}{5(x-1)^2 \cdot 3(x+1)} = \frac{x}{3(x-1)}$$

**Bài 44.** Tìm biểu thức Q, biết rằng:  $\frac{x^2+2x}{x-1} \cdot Q = \frac{x^2-4}{x^2-x}$

**Giải**

$$\frac{x^2+2x}{x-1} \cdot Q = \frac{x^2-4}{x^2-x} \Rightarrow Q = \frac{x^2-4}{x^2-x} : \frac{x^2+2x}{x-1} = \frac{x^2-4}{x^2-x} \cdot \frac{x-1}{x^2+2x}$$

$$Q = \frac{(x-2)(x+2)(x-1)}{x(x-1)x(x+2)} = \frac{x-2}{x^2}$$

**Bài 45. Đố.** Đố em điền được vào chỗ trống của dãy phép chia dưới đây những phân thức có tử thức bằng mẫu thức cộng với 1 :

$$\frac{x}{x+1} : \frac{x+2}{x+1} : \frac{x+3}{x+2} : \dots = \frac{x}{x+6}$$

Em hãy ra cho bạn một câu đố tương tự, với vế trái của đẳng thức là

$$\frac{x}{x+n} \text{ trong đó } n \text{ là số tự nhiên lớn hơn 1 tùy ý mà em thích.}$$

**Giải**

$$\frac{x}{x+1} : \frac{x+2}{x+1} : \frac{x+3}{x+2} : \frac{x+4}{x+3} : \frac{x+5}{x+4} : \frac{x+6}{x+5} = \frac{x}{x+6}$$



$$\text{Ví: } \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x+4}{x+3} \cdot \frac{x+5}{x+4} \cdot \frac{x+6}{x+5} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x+5} \cdot \frac{x+5}{x+6}$$

$$= \frac{x}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+2}} \cdot \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+3}} \cdot \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{x+4}} \cdot \frac{\cancel{x+4}}{\cancel{x+5}} \cdot \frac{\cancel{x+5}}{x+6} = \frac{x}{x+6}$$

## §9 . BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ. GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Một biểu thức chỉ chứa các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và chứa biến ở mẫu thức được gọi là **biểu thức phân**.

– Một đa thức còn gọi là một **biểu thức nguyên**

Biểu thức nguyên và biểu thức phân đều gọi là **biểu thức hữu tỉ**

– Nhờ các quy tắc của các phép cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi một biểu thức phân thành một phân thức.

– Giá trị của biểu thức phân chỉ được xác định với điều kiện giá trị của mẫu thức khác 0. Biến của biểu thức phân chỉ được nhận các giá trị sao cho giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0.

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 46.** Biến đổi mỗi biểu thức sau thành một phân thức đại số :

a)  $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

b)  $\frac{1 - \frac{2}{x+1}}{1 - \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}}$

**Giải**

a)  $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$

b)  $\frac{1 - \frac{2}{x+1}}{1 - \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}} = \frac{\frac{x+1-2}{x+1}}{\frac{x^2 - 1 - (x^2 - 2)}{x^2 - 1}} = \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x^2 - 1}} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2 - 1}{1} = (x-1)^2$

**Bài 47.** Với giá trị nào của x thì giá trị của mỗi phân thức sau xác định ?

a)  $\frac{5x}{2x+4}$

b)  $\frac{x-1}{x^2-1}$

**Giải**



a) Giá trị phân thức  $\frac{5x}{2x+4}$  được xác định khi

$$2x+4 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq -4 \Rightarrow x \neq -2$$

b) Giá trị phân thức  $\frac{x-1}{x^2-1}$  được xác định khi

$$x^2-1 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \neq 0$$

$$\Rightarrow x-1 \neq 0 \text{ và } x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ và } x \neq -1$$

**Bài 48.** Cho phân thức  $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

a) Với điều kiện nào của x thì giá trị của phân thức được xác định?

b) Rút gọn phân thức

c) Tìm giá trị của x để giá trị phân thức bằng 1

d) Có giá trị nào của x để giá trị của phân thức bằng 0 hay không?

**Giải**

a) Giá trị phân thức  $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$  được xác định khi  $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

b) 
$$\frac{x^2+4x+4}{x+2} = \frac{(x+2)^2}{x+2} = x+2$$

c) Phân thức  $\frac{x^2+4x+4}{x+2} = x+2$  có giá trị bằng 1 khi  $x+2 = 1 \Rightarrow x = -1$

d) Phân thức  $\frac{x^2+4x+4}{x+2} = x+2$  có giá trị bằng 0 khi  $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$

mà  $x = -2$  thì giá trị của phân thức  $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$  không xác định nên

không có giá trị nào của x để giá trị của phân thức bằng 0

**Bài 49. Đố.** Đố em tìm được một phân thức (của một biến x) mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của x khác các ước của 2.

**Giải**

Ta có ước của 2 là  $\pm 1$  và  $\pm 2$

Phân thức có giá trị được xác định với mọi giá trị của x khác các ước

của 2 là  $P = \frac{1}{(x^2-1)(x^2-4)}$  hoặc  $Q = \frac{2x-3}{(x-1)(2x+2)(x+2)(3x-6)} \cdot \dots$

**Luyện tập**

**Bài 50.** Thực hiện các phép tính:

a)  $\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2}\right)$       b)  $(x^2-1) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1\right)$

**Giải**

a) 
$$\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2}\right) = \frac{(2x+1)(1-x)(1+x)}{(x+1)(1-2x)(1+2x)} = \frac{1-x}{1-2x}$$



$$\begin{aligned} \text{b) } (x^2 - 1) \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 \right) &= (x^2 - 1) \left[ \frac{x+1 - (x-1) - (x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \right] \\ &= (x^2 - 1) \cdot \frac{3 - x^2}{x^2 - 1} = 3 - x^2 \end{aligned}$$

**Bài 51.** Làm các phép tính sau:

$$\text{a) } \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) : \left( \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \quad \text{b) } \left( \frac{1}{x^2 + 4x + 4} - \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \right) : \left( \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right)$$

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) : \left( \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) &= \frac{x^3 + y^3}{xy^2} : \frac{x^2 - xy + y^2}{xy^2} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{x^2 - xy + y^2} \\ &= \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)xy^2}{xy^2(x^2 - xy + y^2)} = x + y \end{aligned}$$

**Bài 52.** Chứng tỏ rằng với  $x \neq 0$  và  $x \neq \pm a$  ( $a$  là một số nguyên), giá trị của biểu thức  $\left( a - \frac{x^2 + a^2}{x+a} \right) \cdot \left( \frac{2a}{x} - \frac{4a}{x-a} \right)$  là một số chẵn.

**Giải**

$$\begin{aligned} \left( a - \frac{x^2 + a^2}{x+a} \right) \cdot \left( \frac{2a}{x} - \frac{4a}{x-a} \right) &= \left[ \frac{a(x+a) - (x^2 + a^2)}{x+a} \right] \cdot \left[ \frac{2a(x-a) - 4ax}{x(x-a)} \right] \\ &= \frac{ax + a^2 - x^2 - a^2}{x+a} \cdot \frac{2ax - 2a^2 - 4ax}{x(x-a)} = \frac{ax - x^2}{x+a} \cdot \frac{-2a^2 - 2ax}{x(x-a)} = \frac{2ax(x-a)(x+a)}{x(x+a)(x-a)} = 2a \end{aligned}$$

Với  $x \neq 0$  và  $x \neq \pm a$  và  $a$  là một số nguyên thì

$$\left( a - \frac{x^2 + a^2}{x+a} \right) \cdot \left( \frac{2a}{x} - \frac{4a}{x-a} \right) = 2a \text{ là một số chẵn.}$$

**Bài 53.** a) Biến đổi mỗi biểu thức sau thành một phân thức đại số :

$$1 + \frac{1}{x}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

b) Em hãy dự đoán kết quả của phép biến đổi biểu thức

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}$$

thành phân thức đại số và kiểm tra lại dự đoán đó.

**Giải**



a) Biến đổi từ dưới lên

$$\text{i) } 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\text{ii) } 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1+x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

$$\text{iii) } 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1}{1+x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{x+1+x}{x+1}} = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1}$$

b) Dự đoán kết quả : Từ i), ii) và iii) thì phân thức đại số thu được có tử thức bằng tổng của tử thức và mẫu thức, còn mẫu thức là tử thức của phân thức trước đó. Khi đó, kết quả là  $\frac{8x+3}{5x+3}$

Thật vậy:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2x+1}{3x+2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5x+3}{3x+2}} = 1 + \frac{3x+2}{5x+3} = \frac{8x+5}{5x+3}$$

**Bài 54.** Tìm các giá trị của x để giá trị của phân thức sau được xác định:

a)  $\frac{3x+2}{2x^2-6x}$

b)  $\frac{5}{x^2-3}$

**Giải**

a) Giá trị phân thức  $\frac{3x+2}{2x^2-6x}$  được xác định khi:  $2x^2-6x \neq 0$

$$\Rightarrow 2x(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } x \neq 3$$

b) Giá trị phân thức  $\frac{5}{x^2-3}$  được xác định khi:  $x^2-3 \neq 0$

$$\Rightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \neq 0 \Rightarrow x \neq \sqrt{3} \text{ và } x \neq -\sqrt{3}$$

**Bài 55.** Cho phân thức  $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

a) Với giá trị nào của x thì giá trị của phân thức được xác định?

b) Chứng tỏ phân thức rút gọn của phân thức đã cho là  $\frac{x+1}{x-1}$ .

c) Để tính giá trị của phân thức đã cho tại  $x=2$  và tại  $x=-1$ , bạn Thắng đã làm như sau:

- Với  $x=2$ , phân thức đã cho có giá trị là  $\frac{2+1}{2-1} = 3$



– Với  $x = -1$ , phân thức đã cho có giá trị là  $\frac{-1+1}{-1-1} = 0$

Em có đồng ý không? Nếu không, em hãy chỉ ra chỗ em cho là sai.

Theo em, với những giá trị nào của biến thì có thể tính được giá trị của phân thức đã cho bằng cách tính giá trị của phân thức rút gọn?

### Giải

a) Giá trị của phân thức được xác định khi  $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

b) Ta có:  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$

c) – Với  $x = 2$ , phân thức đã cho được xác định nên giá trị của phân thức tại  $x = 2$  là  $\frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

– Với  $x = -1$ , phân thức đã cho không xác định nên không tính được giá trị của phân thức tại  $x = -1$

– Với mọi biến  $x \neq \pm 1$  thì có thể tính được giá trị của phân thức đã cho bằng cách tính giá trị của phân thức rút gọn

**Bài 56.** Cho phân thức  $\frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8}$

a) Với điều kiện nào của  $x$  thì giá trị của phân thức được xác định?

b) Rút gọn phân thức

c) Em có biết trên  $1\text{cm}^2$  bề mặt da của em có bao nhiêu con vi khuẩn không?

Tính giá trị của biểu thức đã cho tại  $x = \frac{4001}{2000}$  em sẽ tìm được câu trả

lời thật đáng sợ. (Tuy nhiên trong số đó chỉ có 20% là vi khuẩn có hại)

### Giải

a) Giá trị của phân thức được xác định khi :

$$x^3 - 8 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) \neq 0 \quad x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

b) Ta có:  $\frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8} = \frac{3(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{3}{x-2}$

c) Với  $x = \frac{4001}{2000} \neq 2$  nên phân thức được xác định và giá trị của phân

$$\text{thức là: } \frac{3}{\frac{4001}{2000} - 2} = \frac{6000}{4001 - 4000} = 6000$$

Vậy,  $1\text{cm}^2$  bề mặt da của em có 6000 con vi khuẩn.

### Ôn tập chương

**Bài 57.** Chứng tỏ mỗi cặp phân thức sau bằng nhau :



$$a) \frac{3}{2x-3} \text{ và } \frac{3x+6}{2x^2+x-6}$$

$$b) \frac{2}{x+4} \text{ và } \frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x}$$

**Giải**

$$a) \text{ Ta có: } \frac{3x+6}{2x^2+x-6} = \frac{3(x+2)}{2x^2+4x-3x-6} = \frac{3(x+2)}{2x(x+2)-3(x+2)} \\ = \frac{3(x+2)}{(x+2)(2x-3)} = \frac{3}{2x-3}$$

$$b) \text{ Ta có: } \frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x} = \frac{2x(x+3)}{x(x^2+7x+12)} = \frac{2(x+3)}{x^2+7x+12} = \frac{2(x+3)}{x^2+3x+4x+12} \\ = \frac{2(x+3)}{x(x+3)+4(x+3)} = \frac{2(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{2}{x+4}$$

**Bài 58.** Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \left( \frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} \right) : \frac{4x}{10x-5} \quad b) \left( \frac{1}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1} \right) : \left( \frac{1}{x} + x - 2 \right)$$

$$c) \frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \cdot \left( \frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{1-x^2} \right)$$

**Giải**

$$a) \left( \frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} \right) : \frac{4x}{10x-5} = \left[ \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} \right] \cdot \frac{10x-5}{4x} \\ = \left[ \frac{(4x^2+4x+1) - (4x^2-4x+1)}{(2x-1)(2x+1)} \right] \cdot \frac{10x-5}{4x} = \frac{8x}{(2x-1)(2x+1)} \cdot \frac{5(2x-1)}{4x} \\ = \frac{10}{2x+1}$$

$$b) \left( \frac{1}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1} \right) : \left( \frac{1}{x} + x - 2 \right) = \left[ \frac{1}{x(x+1)} - \frac{2-x}{x+1} \right] : \left( \frac{1+x^2-2x}{x} \right) \\ = \frac{1-x(2-x)}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{x^2-2x+1} = \frac{x^2-2x+1}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{x^2-2x+1} = \frac{1}{x+1}$$

$$c) \frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \cdot \left( \frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{1-x^2} \right) = \frac{1}{x-1} - \frac{x(x^2-1)}{x^2+1} \cdot \left[ \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2-1} \right] \\ = \frac{1}{x-1} - \frac{x(x-1)(x+1)}{x^2+1} \cdot \left[ \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} \right] = \frac{1}{x-1} - \frac{x(x-1)(x+1)}{x^2+1} \cdot \frac{2}{(x-1)^2(x+1)} \\ = \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{x^2+1-2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

**Bài 59.** a) Cho biểu thức  $\frac{xP}{x+P} - \frac{yP}{y-P}$ . Thay  $P = \frac{xy}{x-y}$  vào biểu thức đã cho rồi rút gọn biểu thức.



b) Cho biểu thức  $\frac{P^2Q^2}{P^2 - Q^2}$ . Thay  $P = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$  và  $Q = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  vào biểu thức đã cho rồi rút gọn biểu thức.

**Giải**

a) Thay  $P = \frac{xy}{x - y}$  vào biểu thức, ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{xP}{x + P} - \frac{yP}{y - P} = \frac{x \cdot \frac{xy}{x - y}}{x + \frac{xy}{x - y}} - \frac{y \cdot \frac{xy}{x - y}}{y - \frac{xy}{x - y}} = \frac{\frac{x^2y}{x - y}}{\frac{x(x - y) + xy}{x - y}} - \frac{\frac{xy^2}{x - y}}{\frac{y(x - y) - xy}{x - y}} \\ &= \frac{x^2y}{x - y} \cdot \frac{x - y}{x^2} - \frac{xy^2}{x - y} \cdot \frac{x - y}{(-y^2)} = y + x \end{aligned}$$

b) Ta có :  $P^2Q^2 = \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)^2 = \frac{16x^4y^4}{(x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2)^2} \quad (*)$

$$\begin{aligned} P^2 - Q^2 &= \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right)^2 - \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)^2 = \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2}\right) \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}\right) \\ &= 4x^2y^2 \left(\frac{1}{x^2 - y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) \left(\frac{1}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) \\ &= 4x^2y^2 \left[\frac{(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}\right] \left[\frac{(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}\right] \\ &= 4x^2y^2 \frac{2y^2}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} \cdot \frac{2x^2}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} = \frac{16x^4y^4}{(x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2)^2} \quad (**)$$

Từ (\*) và (\*\*) ta có :  $P^2Q^2 = P^2 - Q^2 \Rightarrow \frac{P^2Q^2}{P^2 - Q^2} = 1$

**Bài 60.** Cho biểu thức  $\left(\frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2}\right) \cdot \frac{4x^2-4}{5}$

- Hãy tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định?
- Chứng minh rằng khi giá trị của biểu thức xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x.

**Giải**

a) Giá trị của biểu thức được xác định khi

$$\begin{cases} 2x - 2 \neq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \\ 2x + 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } & \frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2} = \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+3}{2(x+1)} \\ & = \frac{(x+1)^2 + 6 - (x+3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x + 1 + 6 - (x^2 + 2x - 3)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x^2-1} \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó: } \left( \frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2} \right) \cdot \frac{4x^2-4}{5} = \frac{5}{x^2-1} \cdot \frac{4(x^2-1)}{5} = 4$$

**Bài 61.** Tìm điều kiện của  $x$  để giá trị của biểu thức  $\left( \frac{5x+2}{x^2-10x} + \frac{5x-2}{x^2+10x} \right) \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4}$  được xác định. Tính giá trị của biểu thức tại  $x = 20040$ .

**Giải**

Giá trị của biểu thức được xác định khi

$$\begin{cases} x^2 - 10x \neq 0 \\ x^2 + 10x \neq 0 \\ x^2 + 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-10) \neq 0 \\ x(x+10) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{5x+2}{x^2-10x} + \frac{5x-2}{x^2+10x} \right) \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4} &= \left[ \frac{5x+2}{x(x-10)} + \frac{5x-2}{x(x+10)} \right] \cdot \frac{(x-10)(x+10)}{x^2+4} \\ &= \left[ \frac{(5x+2)(x+10) + (x-10)(5x-2)}{x(x-10)(x+10)} \right] \cdot \frac{(x-10)(x+10)}{x^2+4} \\ &= \frac{10x^2+40}{x(x-10)(x+10)} \cdot \frac{(x-10)(x+10)}{x^2+4} = \frac{10(x^2+4)}{x(x^2+4)} = \frac{10}{x} \end{aligned}$$

Tại  $x = 20040$  thỏa mãn điều kiện nên giá trị của biểu thức là

$$\frac{10}{20040} = \frac{1}{2004}$$

**Bài 62.** Tìm giá trị của  $x$  để giá trị của phân thức  $\frac{x^2-10x+25}{x^2-5x}$  bằng 0.

**Giải**

Giá trị của biểu thức được xác định khi  $x^2 - 5x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$  và  $x \neq 5$

$$\text{Ta có: } \frac{x^2-10x+25}{x^2-5x} = 0 \Rightarrow x^2-10x+25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

(không thỏa mãn điều kiện)

Vậy không có giá trị nào của  $x$  để giá trị của phân thức bằng 0



**Bài 63.** Viết mỗi phân thức sau dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức với tử thức là một hằng số, rồi tìm các giá trị nguyên của  $x$  để giá trị của phân thức cũng là số nguyên:

a)  $\frac{3x^2 - 4x - 17}{x + 2}$

b)  $\frac{x^2 - x + 2}{x - 3}$

**Giải**

a) Ta có:  $P = \frac{3x^2 - 4x - 17}{x + 2} = 3x - 10 + \frac{3}{x + 2}$

Để  $x \in \mathbb{Z}$  và  $P \in \mathbb{Z}$  thì  $x + 2$  là ước của 3

Ước của 3 là  $\pm 1; \pm 3$  nên  $x + 2 = -1 \Rightarrow x = -3$ ;  $x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$

$x + 3 = -3 \Rightarrow x = -6$ ;  $x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$

Vậy  $x \in \{-6; -3; -1; 0\}$

b) Ta có:  $Q = \frac{x^2 - x + 2}{x - 3} = x + 2 + \frac{8}{x - 3}$

Để  $x \in \mathbb{Z}$  và  $Q \in \mathbb{Z}$  thì  $x - 3$  là ước của 8

Ước của 8 là  $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$  nên  $x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$ ;  $x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$

$x - 3 = -2 \Rightarrow x = 1$ ;  $x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5$ ;  $x - 3 = -4 \Rightarrow x = -1$ ;  $x - 3 = 4$

$\Rightarrow x = 7$ ;  $x - 3 = -8 \Rightarrow x = -5$ ;  $x - 3 = 8 \Rightarrow x = 11$

Vậy  $x \in \{-5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11\}$

**Bài 64.** Tính giá trị của phân thức trong bài tập 62 tại  $x = 1,12$  và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba.

**Giải**

Phân thức trong bài tập 62 là  $P = \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 5x} = \frac{(x - 5)^2}{x(x - 5)} = \frac{x - 5}{x}$

Tại  $x = 1,12 \neq 5$  nên giá trị của phân thức

$$P = \frac{1,12 - 5}{1,12} = -\frac{3,88}{1,12} = -\frac{97}{28} \approx -3,464$$



# Chương I- TỨ GIÁC

## §1 . TỨ GIÁC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

- Tứ giác ABCD là hình gồm 4 đoạn thẳng AB, BC, CD DA, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

- Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.

#### 2. Chú ý

Từ nay, khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm ta hiểu đó là tứ giác lồi.

#### 3. Tính chất

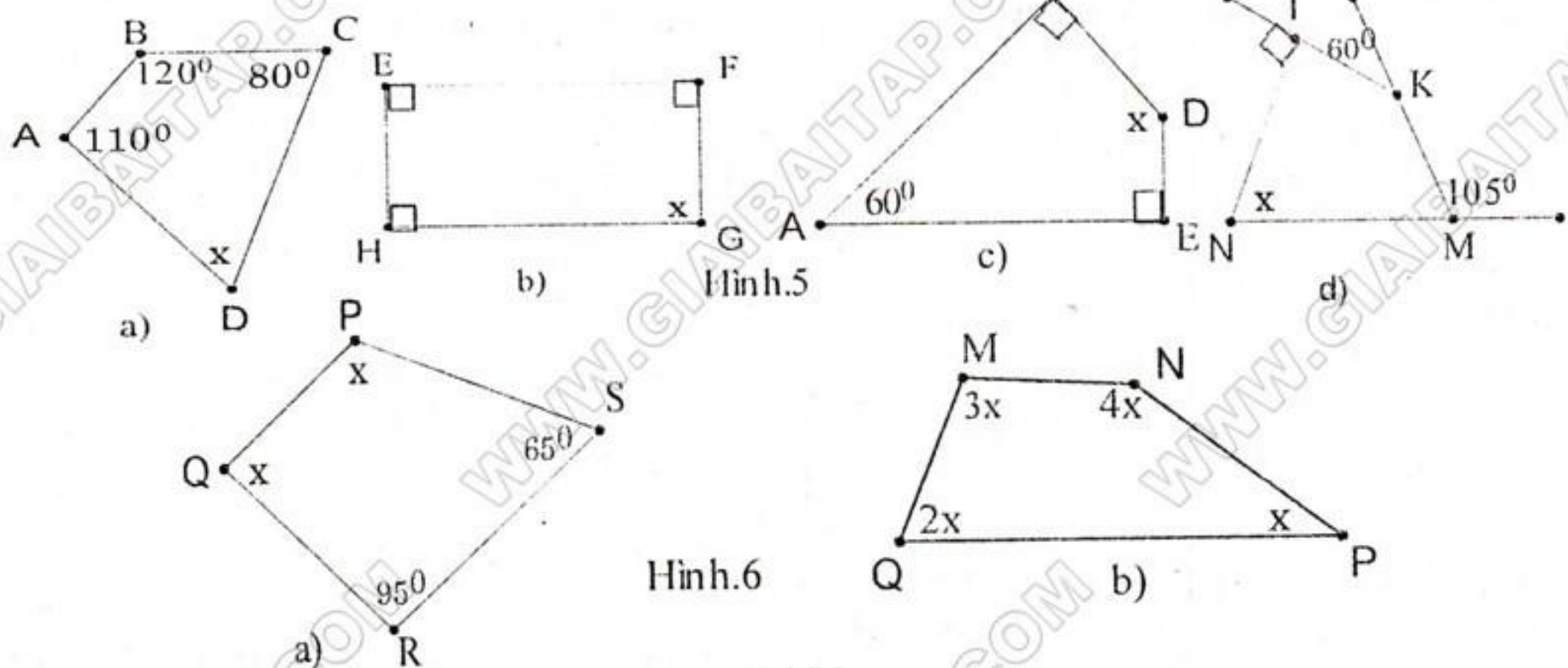
- Trong một tứ giác lồi, hai đường chéo cắt nhau tại một điểm thuộc miền trong của tứ giác.

- Tổng bốn góc của một tứ giác bằng  $360^\circ$ .

- Tổng các góc ngoài của một tứ giác lồi bằng  $360^\circ$ .

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Tìm x ở hình 5, hình 6:



Hình.6

**Giải**

\* Hình 5a) Xét tứ giác ABCD có:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$   
 $\Rightarrow 110^\circ + 120^\circ + 80^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 360^\circ - (110^\circ + 120^\circ + 80^\circ)$   
 $= 360^\circ - 310^\circ = 50^\circ$

\* Hình 5b) Xét tứ giác EFGH có:  $\hat{E} + \hat{F} + \hat{G} + \hat{H} = 360^\circ$   
 $\Rightarrow 90^\circ + 90^\circ + x + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow 270^\circ + x = 360^\circ$   
 $\Rightarrow x = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$



\* Hình 5c) Xét tứ giác ABDE có:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} + \hat{E} = 360^\circ$   
 $\Rightarrow 65^\circ + 90^\circ + x + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow 245^\circ + x = 360^\circ$   
 $\Rightarrow x = 360^\circ - 245^\circ = 115^\circ$

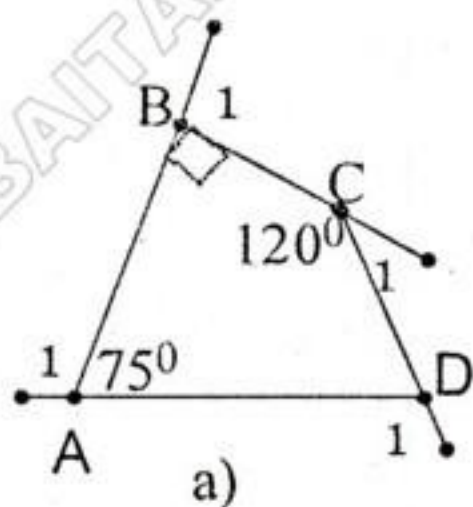
\* Hình 5d) Xét tứ giác IKMN có:  $\hat{I} + \hat{K} + \hat{M} + \hat{N} = 360^\circ$   
 Ta có:  $\hat{I} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ;  $\hat{K} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  và  
 $\hat{M} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$   
 $\Rightarrow 90^\circ + 120^\circ + 75^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow 285^\circ + x = 360^\circ$   
 $\Rightarrow x = 360^\circ - 285^\circ = 75^\circ$

\* Hình 6a) Xét tứ giác PQRS có:  $\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} = 360^\circ$   
 $\Rightarrow x + x + 95^\circ + 65^\circ = 360^\circ \Rightarrow 160^\circ + 2x = 360^\circ \Rightarrow x = \frac{360^\circ - 160^\circ}{2} = 100^\circ$

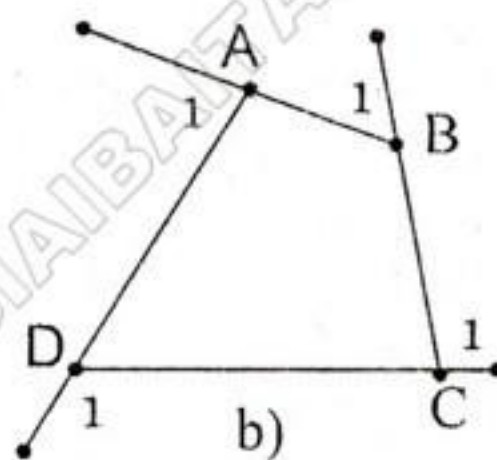
\* Hình 6b) Xét tứ giác MNPQ có:  $\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} + \hat{Q} = 360^\circ$   
 $\Rightarrow 3x + 4x + x + 2x = 360^\circ \Rightarrow 10x = 360^\circ \Rightarrow x = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

**Bài 2.** Góc kề bù với một góc của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác.

- Tính các góc ngoài của tứ giác ở hình 7a.
- Tính tổng các góc ngoài của tứ giác ở hình 7b (tại mỗi đỉnh của tứ giác chỉ chọn một góc ngoài):  $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = ?$
- Có nhận xét gì về tổng các góc ngoài của tứ giác?



Hình.7



**Giải**

a) Hình 7a) Xét tứ giác ABCD có:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$   
 $\Rightarrow 75^\circ + 90^\circ + 120^\circ + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow 285^\circ + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{D} = 360^\circ - 285^\circ = 75^\circ$

Ta có:  $\hat{A}_1 = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ ;  $\hat{B}_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$   
 $\hat{C}_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ;  $\hat{D}_1 = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$   
 $\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = 105^\circ + 90^\circ + 60^\circ + 105^\circ = 360^\circ$

b) Hình 7b) Xét tứ giác ABCD có:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$

Ta có:  $\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$ ;  $\hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{B}$ ;  $\hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{C}$ ;  $\hat{D}_1 = 180^\circ - \hat{D}$



$$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} + \widehat{D_1} = 180^\circ - \widehat{A} + 180^\circ - \widehat{B} + 180^\circ - \widehat{C} + 180^\circ - \widehat{D}$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} + \widehat{D_1} = 4.180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}) = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$$

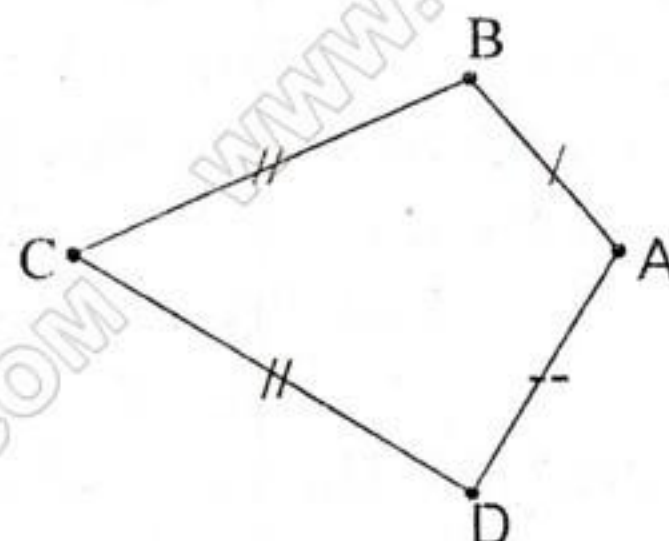
c) Nhận xét: Tổng các góc ngoài của một tứ giác bằng  $360^\circ$

**Bài 3.** Ta gọi tứ giác ABCD trên hình 8 có  $AB = AD$ ,  $CB = CD$  là hình "cái điều".

a) Chứng minh rằng AC là đường trung trực của BD.

b) Tính  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{D}$  biết rằng

$$\widehat{A} = 100^\circ, \widehat{C} = 60^\circ$$



Hình.8

**Giải**

a) Ta có:  $AB = AD \Rightarrow A$  thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BD

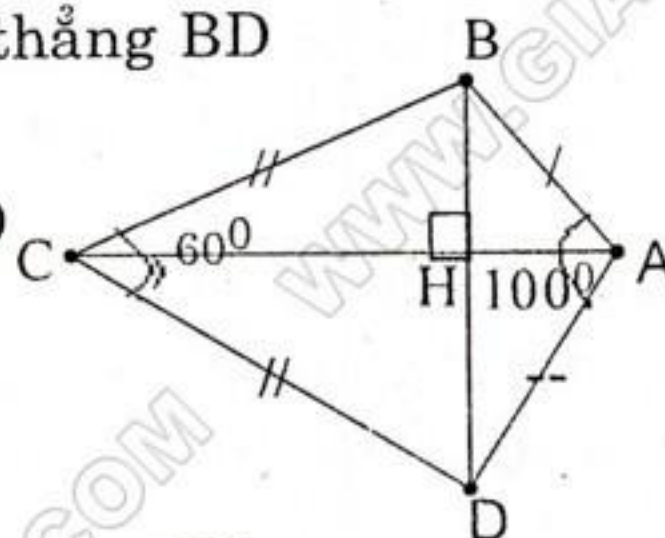
$CB = CD \Rightarrow C$  thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BD

Suy ra: AC là đường trung trực của đoạn thẳng BD

b) Gọi H là giao điểm của AC và BD

$\Rightarrow CH$  là phân giác góc  $\widehat{BCD}$  và  $CH \perp BD$

$$\Rightarrow \widehat{BCH} = \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



Xét  $\Delta_v BHC$ :  $\widehat{CBH} + \widehat{BCH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CBH} = 90^\circ - \widehat{BCH} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Tương tự: AH là phân giác góc  $\widehat{BAD}$  và  $AH \perp BD$

$$\Rightarrow \widehat{BAH} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

Xét  $\Delta_v BHA$ :  $\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABH} = 90^\circ - \widehat{BAH} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

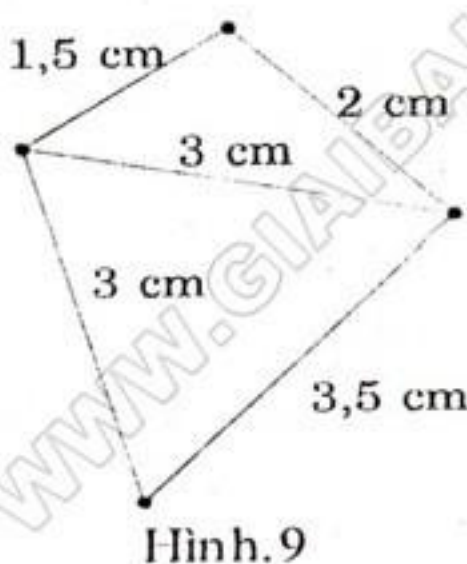
$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABH} + \widehat{CBH} = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 100^\circ$$

Xét tứ giác ABCD có:  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$

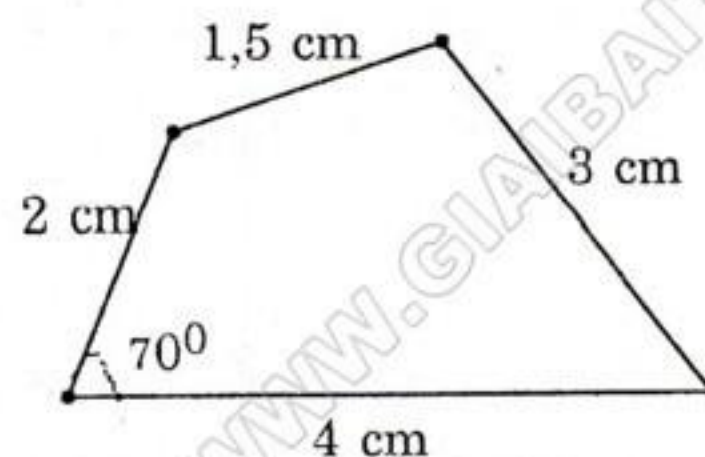
$$\Rightarrow 100^\circ + 100^\circ + 60^\circ + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow 260^\circ + \widehat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{D} = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$$

**Bài 4.** Dựa vào cách vẽ các tam giác đã học, hãy vẽ lại các tứ giác ở hình 9, hình 10 vào vở.



Hình.9



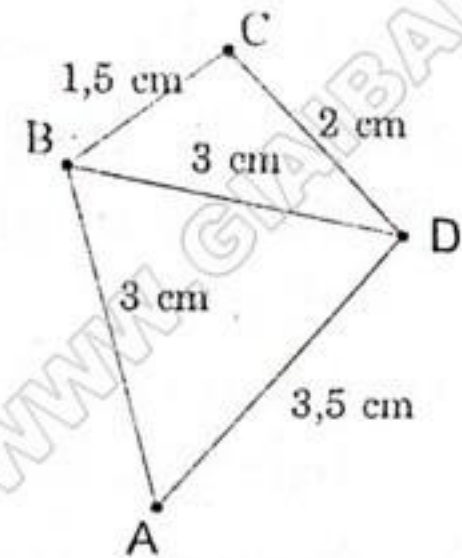
Hình.10



## Giải

\* Vẽ hình 9)

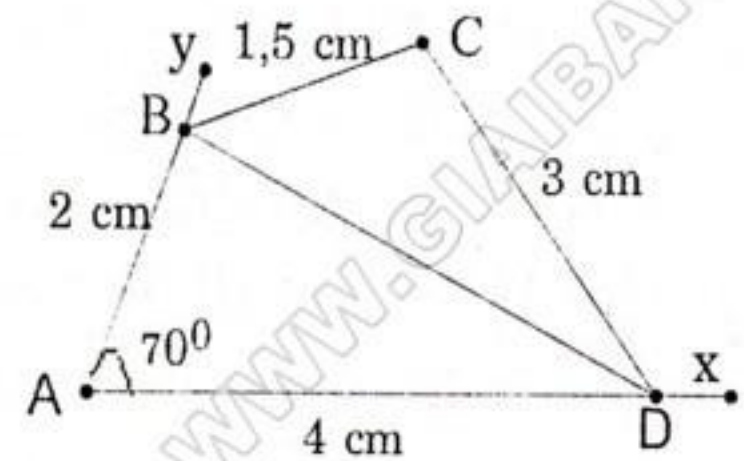
- Dùng thước đo độ dài vẽ đoạn thẳng  $BD = 3 \text{ cm}$
- Lần lượt lấy B, D là tâm vẽ cùng phía các cung tròn có bán kính  $BA = 3 \text{ cm}$  và  $DA = 3,5 \text{ cm}$  đối với đường thẳng BD. Hai cung tròn đó cắt nhau tại điểm A.



- Lần lượt lấy B, D là tâm vẽ cùng phía các cung tròn có bán kính  $BC = 1,5 \text{ cm}$  và  $DC = 2 \text{ cm}$  đối với đường thẳng BD (khác phía đối với điểm A). Hai cung tròn đó cắt nhau tại điểm C.
- Vẽ các đoạn thẳng BA, DA, BC và DC ta được hình 9

\* Vẽ hình 10)

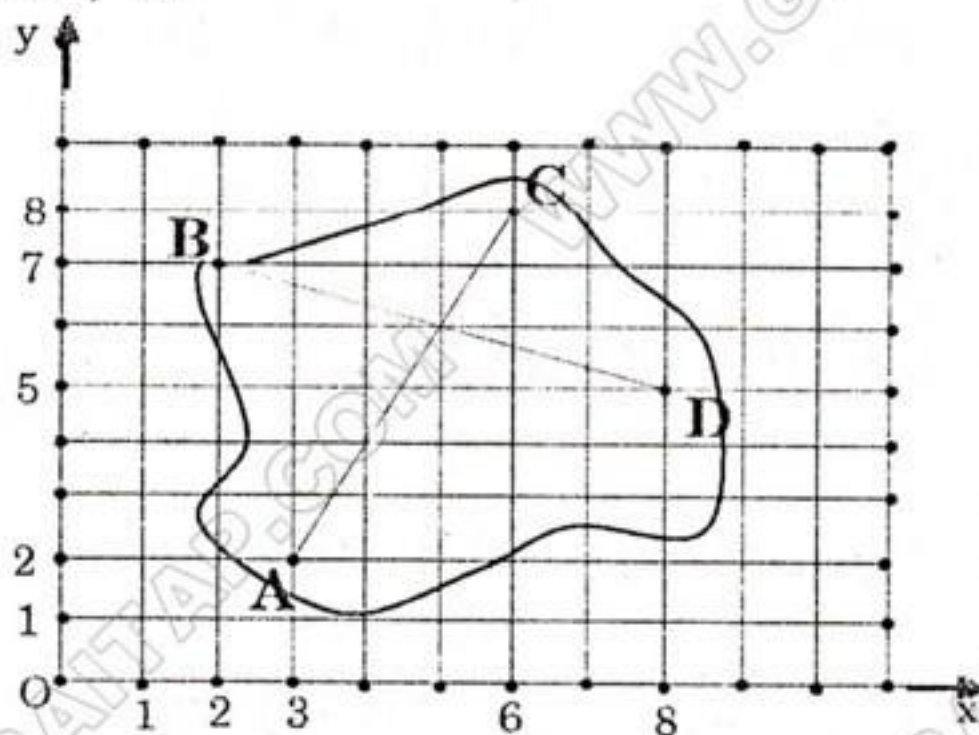
- Dùng thước đo góc vẽ  $\widehat{xAy} = 70^\circ$
- Trên tia Ax lấy điểm D sao cho  $AD = 4 \text{ cm}$
- Trên tia Ay lấy điểm B sao cho  $AB = 2 \text{ cm}$
- Vẽ đoạn thẳng BD



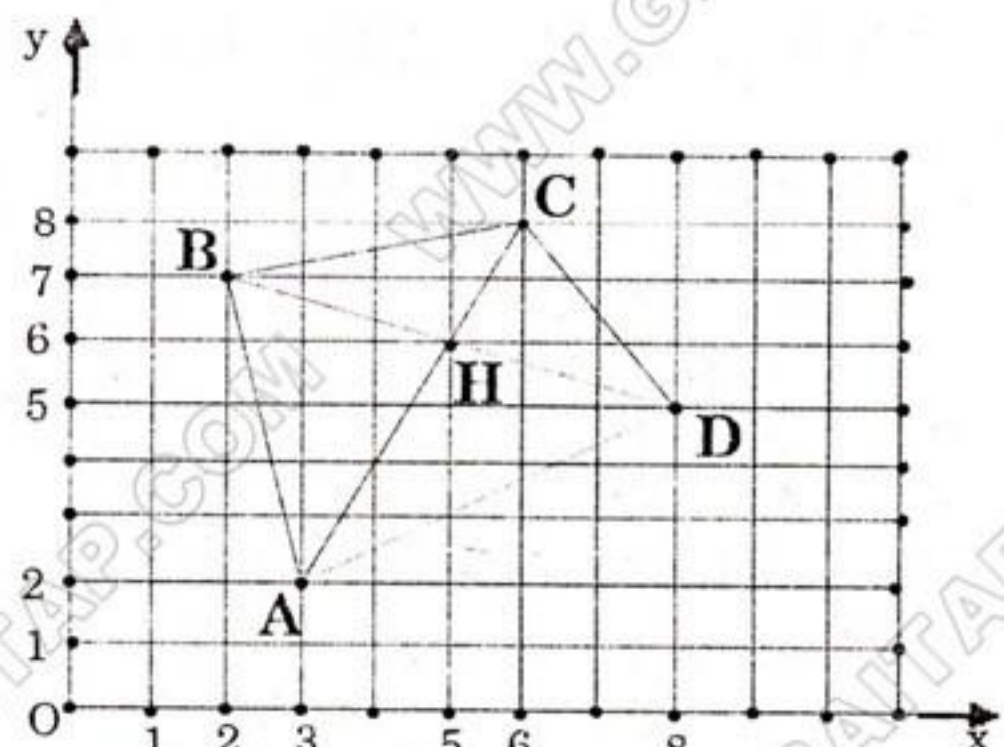
- Lần lượt lấy B, D là tâm vẽ cùng phía các cung tròn có bán kính  $BC = 1,5 \text{ cm}$  và  $DC = 3 \text{ cm}$  đối với đường thẳng BD (khác phía đối với điểm A). Hai cung tròn đó cắt nhau tại điểm C.

- Vẽ các đoạn thẳng BC, DC ta được hình 10

**Bài 5.** Đồ. Đồ em tìm thấy vị trí của “kho báu” trên hình 11, biết rằng kho báu nằm tại giao điểm các đường chéo của tứ giác ABCD, trong đó các đỉnh của tứ giác có tọa độ như sau:  $A(3 ; 2)$ ,  $B(2 ; 7)$ ,  $C(6 ; 8)$ ,  $D(8 ; 5)$



Hình 11



Hình 11 a

## Giải

Vẽ tứ giác ABCD và các đường chéo AC, BD cắt nhau tại  $H(5 ; 6)$   
Chính là vị trí kho báu



## §2 . HÌNH THANG

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

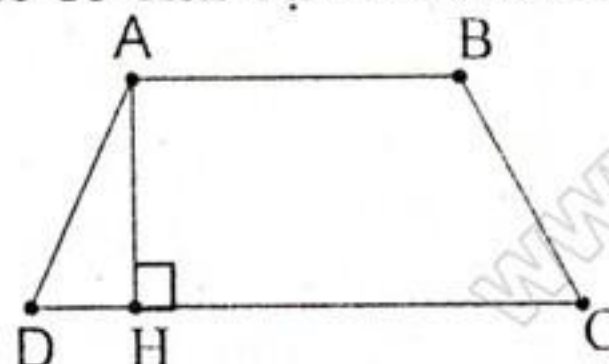
**1. Định nghĩa:** Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

Hình thang ABCD:  $AB \parallel CD$

Cạnh đáy: AB, CD

Cạnh bên: AD, BC

Đường cao: AH



**\*Tính chất:** Trong một hình thang hai góc kề một cạnh bên thì bù nhau.

**\*Nhận xét:** + Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.

+ Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

### 2. Hình thang vuông

**Định nghĩa:** Hình thang vuông là hình thang có một cạnh bên vuông góc với hai cạnh đáy.

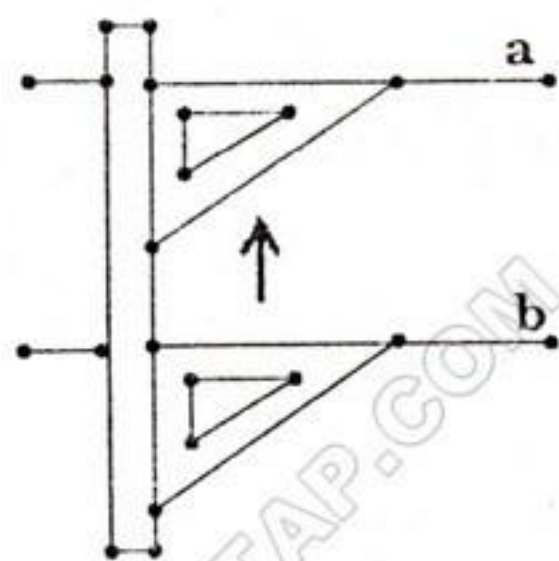
### 3. Dấu hiệu nhận biết hình thang, hình thang vuông

- Một tứ giác có hai cạnh song song là hình thang

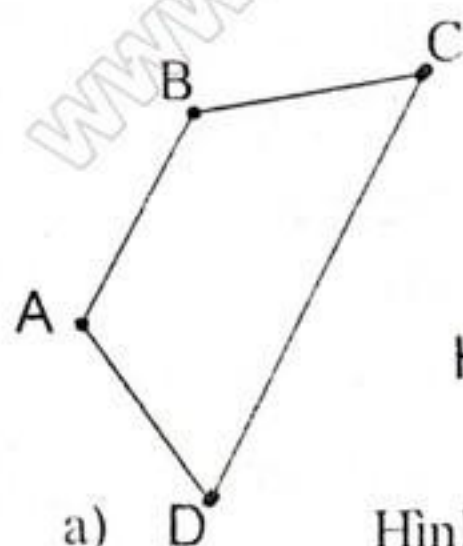
- Hình thang có một góc vuông là hình thang vuông.

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

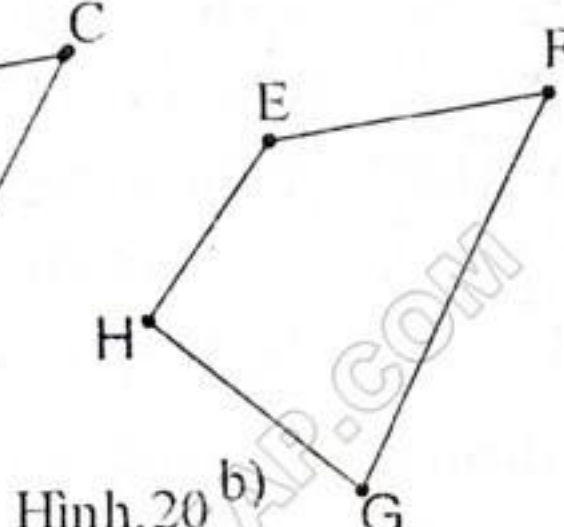
**Bài 6.** Dùng thước và êke, ta có thể kiểm tra được hai đường thẳng có song song với nhau hay không (xem hình 19). Trên hình 20, có những tứ giác là hình thang, có những tứ giác không là hình thang. Bằng cách nêu trên, hãy kiểm tra xem trong các tứ giác ở hình 20, tứ giác nào là hình thang.



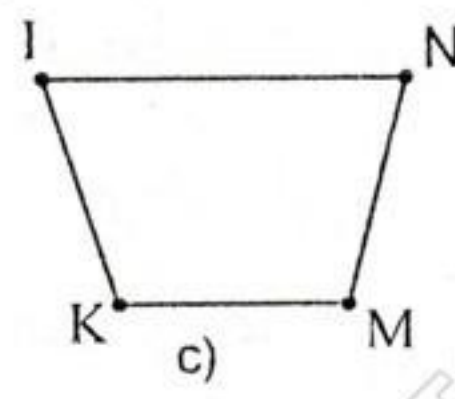
Hình.19



a)



Hình.20 b)



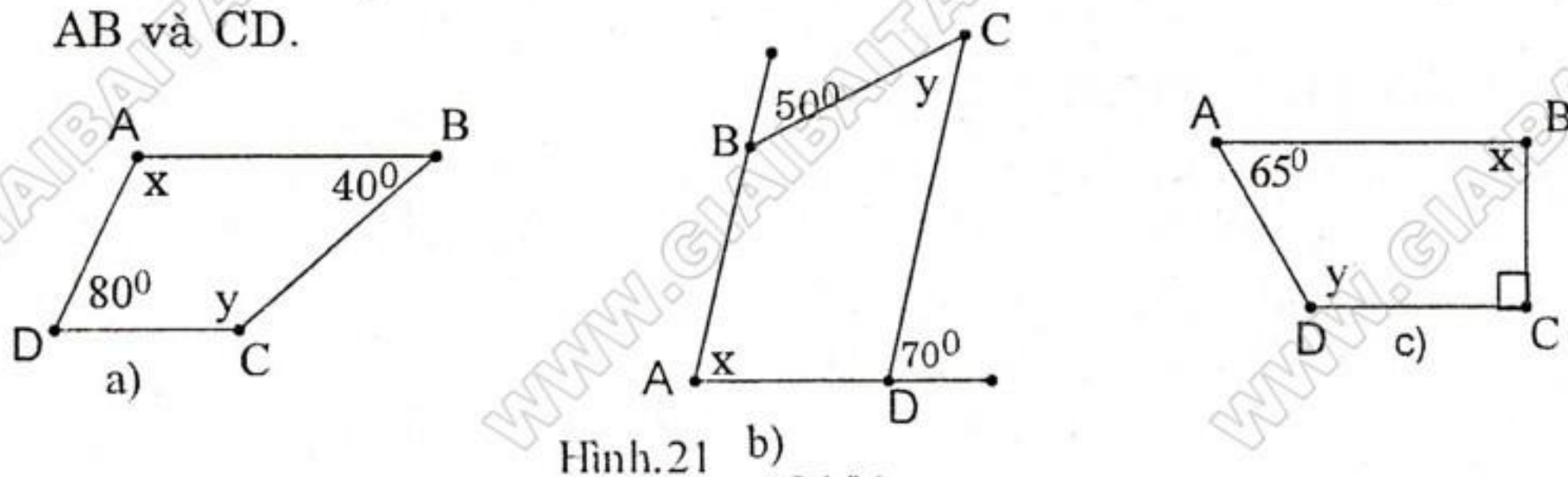
c)

**Giải**

Bằng cách kiểm tra hai đường thẳng song song như hình 19, ta có tứ giác ABCD ( $AB \parallel DC$ ) và tứ giác INMK ( $IN \parallel MK$ ) là hình thang



**Bài 7.** Tìm  $x$  và  $y$  trên hình 21, biết rằng ABCD là hình thang có đáy là AB và CD.



Hình.21 b) **Giải**

\* Hình a) Tứ giác ABCD là hình thang có đáy AB và CD nên  $AB \parallel CD$  và AD, BC là hai cạnh bên

$$\text{Suy ra: } \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow x + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 40^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

\* Hình b) Ta có  $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CDt}$  (đồng vị)

$$\Rightarrow x = 70^\circ$$

$$\widehat{uBC} = \widehat{BCD} \text{ (so le trong)} \Rightarrow y = 50^\circ$$

\* Hình c) Ta có  $AB \parallel CD$  và  $BC \perp DC \Rightarrow BC \perp AB$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$$

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow 65^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

**Bài 8.** Hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $\widehat{A} - \widehat{D} = 20^\circ$ ,  $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ . Tính các góc của hình thang.

**Giải**

Ta có ABCD,  $AB \parallel CD$  và  $\widehat{A} - \widehat{D} = 20^\circ$

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 100^\circ; \widehat{D} = 80^\circ$$

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \text{ và } \widehat{B} = 2\widehat{C} \Rightarrow 3\widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ, \widehat{B} = 120^\circ$$

**Bài 9.** Tứ giác ABCD có  $AB = BC$  và AC là tia phân giác của góc A, Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

**Giải**

Xét  $\triangle ABC$  có  $AB = BC$  (giả thiết)

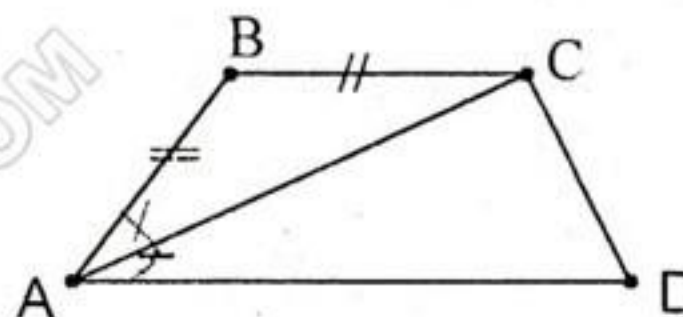
$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại đỉnh B} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$$

$$AC \text{ là tia phân giác } \widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DAC} \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow \text{tứ giác ABCD là hình thang}$$

**Bài 10. Đố.** Hình 22 là hình vẽ một chiếc thang. Trên hình vẽ có bao nhiêu hình thang?

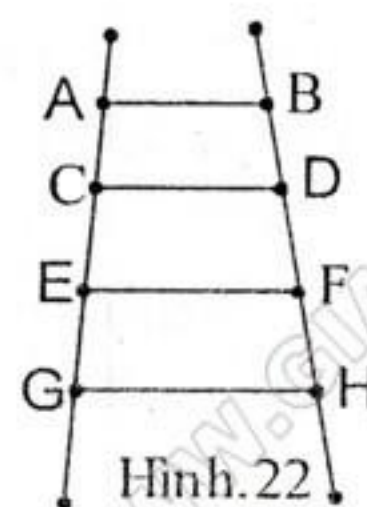
**Giải**





Ta có:  $AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$

$\Rightarrow$  có 6 hình thang là:  $ABDC$ ,  $ABFE$ ,  $ABHG$   
 $CDFE$ ,  $CDHG$ ,  $EFHG$



### §3. HÌNH THANG CÂN

#### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa.** Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một cạnh đáy bằng nhau;  $ABCD$  là hình thang cân  $\Leftrightarrow AB \parallel CD, \hat{D} = \hat{C}$

2. **Tính chất**

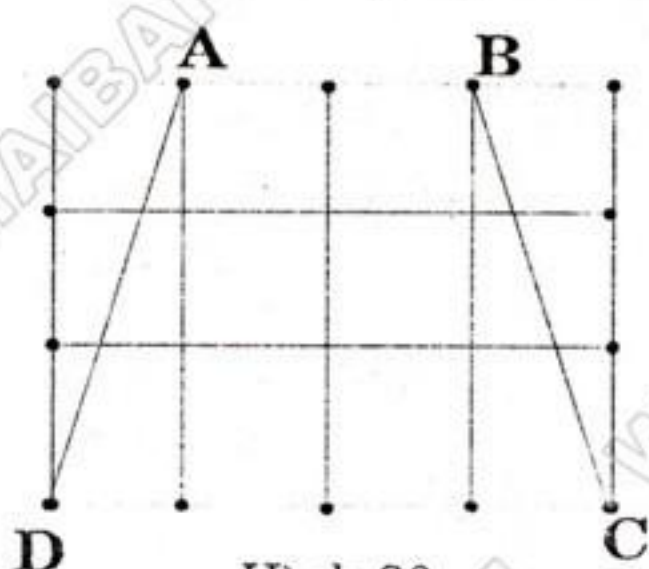
- Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau
- Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân

3. **Dấu hiệu nhận biết hình thang cân**

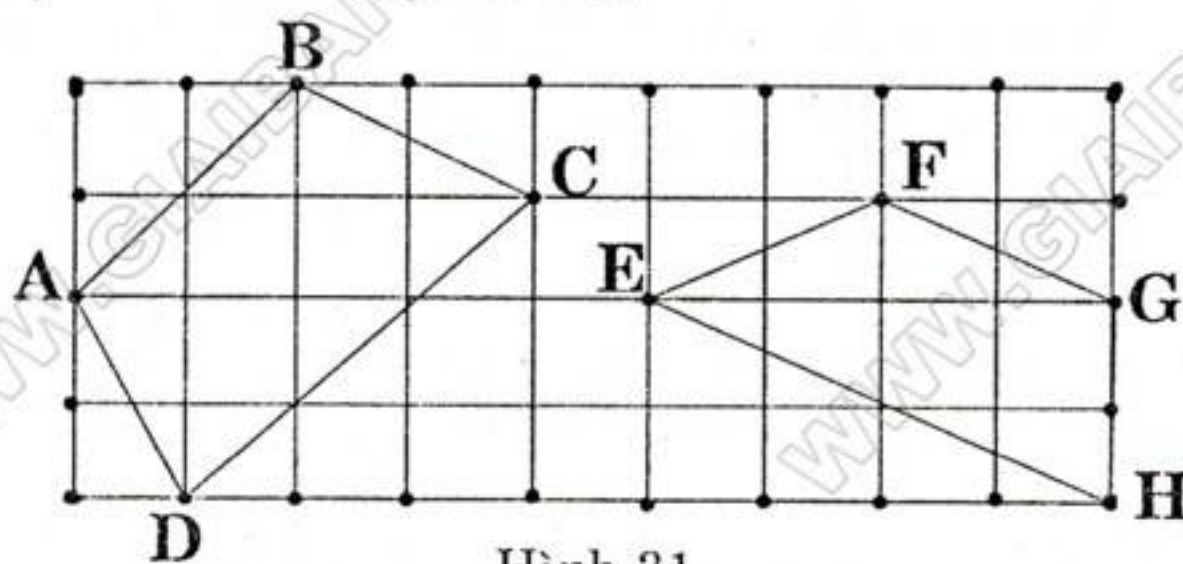
- Hình thang có hai góc kề một cạnh đáy bằng nhau là hình thang cân.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân

#### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 11.** Tính độ dài các cạnh của hình thang cân  $ABCD$  trên giấy kẻ ô vuông (h. 30, độ dài của cạnh ô vuông là 1 cm)



Hình 30



Hình 31

**Giải**

Độ dài của cạnh ô vuông là 1 cm nên  $AB = 2$  cm và  $DC = 4$  cm

$$AD^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow AD = \sqrt{10} \text{ cm}$$

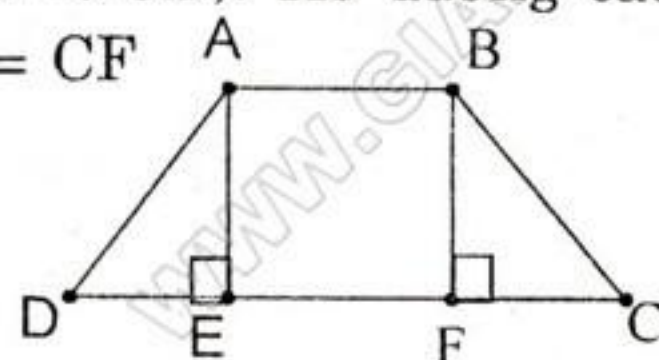
Tứ giác  $ABCD$  là hình thang cân nên  $BC = AD \Rightarrow BC = \sqrt{10}$  cm

**Bài 12.** Cho hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD, AB < CD$ ). Kẻ đường cao  $AE, BF$  của hình thang. Chứng minh rằng  $DE = CF$

**Giải**

Xét hai tam giác vuông  $AED$  và  $BFC$

Ta có:  $\hat{D} = \hat{C}$  ( $ABCD$  là hình thang cân)





$AD = BC$  (ABCD là hình thang cân)  
 $\Rightarrow \triangle AED = \triangle BFC$  (cạnh huyền, góc nhọn)  
 $\Rightarrow DE = CF$

**Bài 13.** Cho hình thang cân ABCD ( $AB \parallel CD$ ), E là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng  $EA = EB$ ,  $EC = ED$

**Giải**

\* Chứng minh  $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$

Ta có ABCD là hình thang cân ABCD,  $AB \parallel CD$

$\Rightarrow AD = BC$  và  $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$

DC là cạnh chung của  $\triangle ADC$  và  $\triangle BCD$

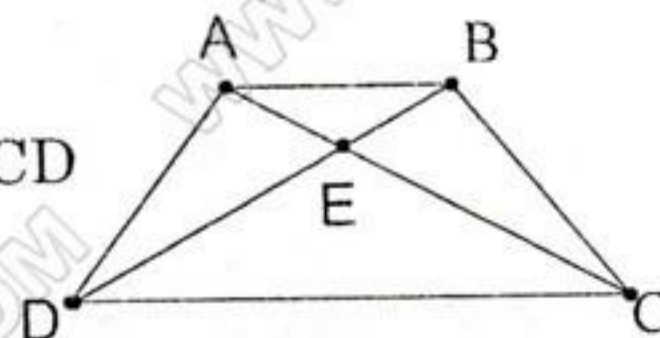
$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle BCD$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$

\* Chứng minh:  $EA = EB$ ,  $EC = ED$

Ta có:  $\widehat{ACD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{ECD} = \widehat{EDC} \Rightarrow \triangle ECD$  cân tại E  $\Rightarrow ED = EC$

Mặt khác:  $AC = BD$  (ABCD là hình thang cân)

$AC = AE + EC$  và  $BD = BE + ED \Rightarrow EA = EB$



**Bài 14. Đố.** Trong các tứ giác ABCD và EFGH trên giấy ô vuông (h. 31), tứ giác nào là hình thang cân? Vì sao?

**Giải**

Quan sát hình 31 ta thấy tứ giác ABCD là hình thang cân

Tứ giác FGHE không phải là hình thang cân vì  $FE > GH$

**Bài 15.** Cho tam giác ABC cân tại A, trên các cạnh AB, AC lấy theo thứ tự các điểm D và E sao cho  $AD = AE$ .

a) Chứng minh rằng BDEC là hình thang cân.

b) Tính các góc của hình thang cân đó, biết rằng  $\widehat{A} = 50^\circ$

**Giải**

a) Ta có:  $\triangle ABC$  cân tại A  $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$

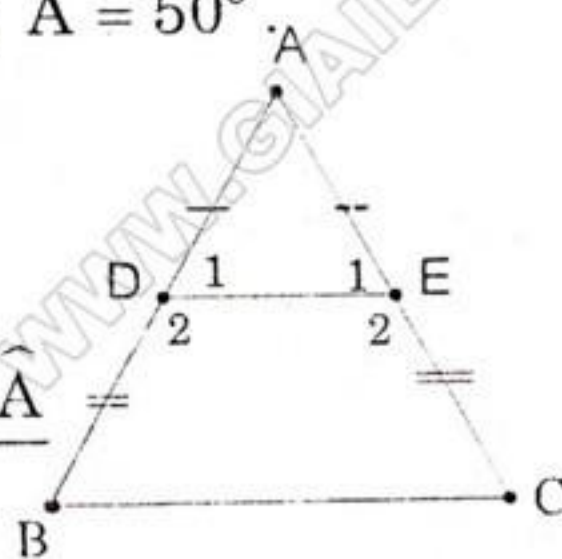
$AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$  cân tại A  $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{E_1} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D_1} \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow$  tứ giác BDEC là hình thang cân.

b) Ta có:  $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$

$\widehat{B} + \widehat{D_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D_2} = 180^\circ - \widehat{B} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$

Ta có:  $\widehat{E_2} = \widehat{D_2}$  (ABCD là hình thang cân)  $\Rightarrow \widehat{E_2} = 115^\circ$





## Luyện tập

**Bài 16.** Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BD, CE ( $D \in AC, E \in AB$ ). Chứng minh rằng BEDC là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên

**Giải**

Xét hai tam giác ADB và AEC

Có  $AB = AC$  ( $\triangle ABC$  cân tại A)

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{ACE} \text{ và } \widehat{A} \text{ là góc chung}$$

$$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle AEC \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE \text{ cân tại A}$$

$$\Rightarrow \widehat{AED} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \text{ và trong } \triangle ABC: \widehat{B} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{B} \Rightarrow ED \parallel BC \Rightarrow \text{tứ giác BEDC là hình thang}$$

Mặt khác:  $\widehat{AED} = \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow$  hình thang BEDC là hình thang cân

**Bài 17.** Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) và  $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$ . Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân

**Giải**

Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

Xét  $\triangle ECD$  có  $\widehat{ACD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \triangle ECD$  cân tại E

$$\Rightarrow ED = EC$$

Ta có:  $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BAE}$  và  $\widehat{BDC} = \widehat{ABE}$

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{ABE} \Rightarrow \triangle EAB \text{ cân tại E} \Rightarrow EA = EB$$

$$\Rightarrow EA + EC = EB + ED \Rightarrow AC = BD \Rightarrow ABCD \text{ là hình thang cân}$$

**Bài 18.** Chứng minh định lý “Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân” qua bài toán: Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $AC = BD$ . Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng DC tại E. Chứng minh rằng:

a)  $\triangle BDE$  là tam giác cân.

b)  $\triangle ACD = \triangle BDC$

c) Hình thang ABCD là hình thang cân

**Giải**

a) Ta có  $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CE$  và  $AC \parallel BE \Rightarrow AC = BE$

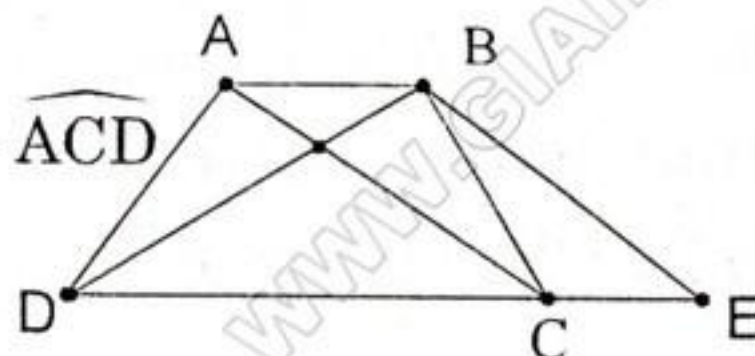
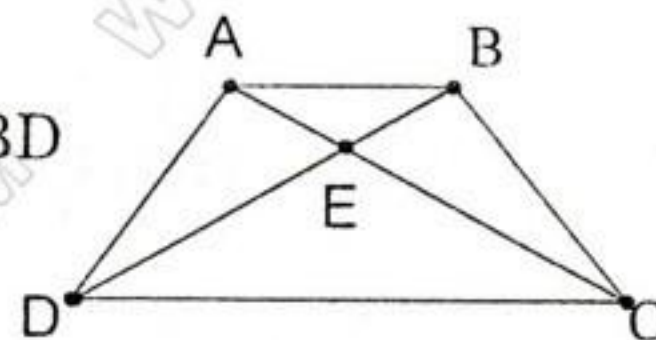
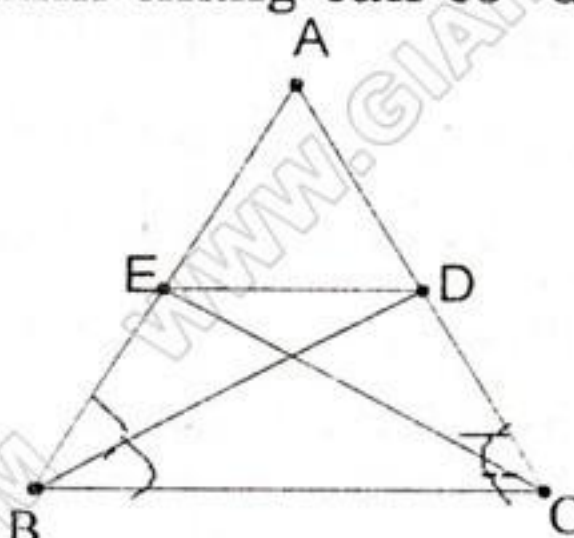
Mặt khác:  $AC = BD \Rightarrow BE = BD \Rightarrow \triangle BDE$  cân tại B

b) Ta có:  $AC \parallel BE \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BEC}$  (đồng vị)

$$\triangle BDE \text{ cân tại B} \Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BEC} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{ACD}$$

$AC = BD$  (giả thiết) và DC cạnh chung

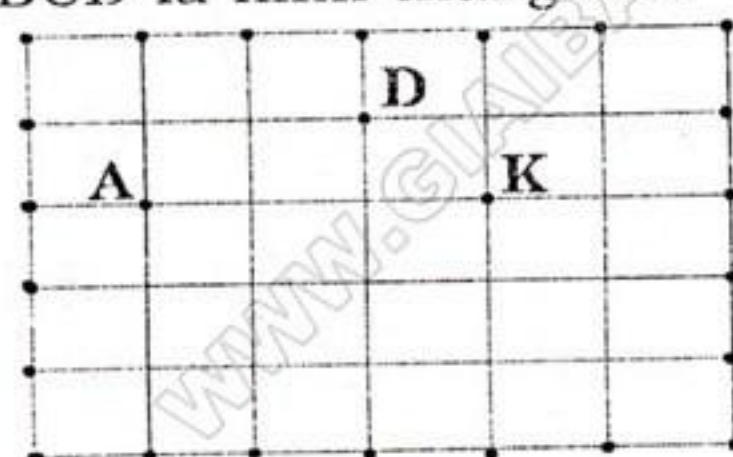
$$\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BDC \text{ (c.g.c)}$$





- c) Ta có  $\triangle ACD = \triangle BDC \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BCD}$   
 tứ giác ABCD là hình thang  $\Rightarrow$  hình thang ABCD là hình thang cân

**Bài 19. Đố.** Cho ba điểm A, D, K trên tờ giấy kẻ ô vuông (h.32). Hãy tìm điểm thứ tư M là giao điểm của các dòng kẻ sao cho nó cùng ba điểm đã cho là bốn đỉnh của một hình thang cân

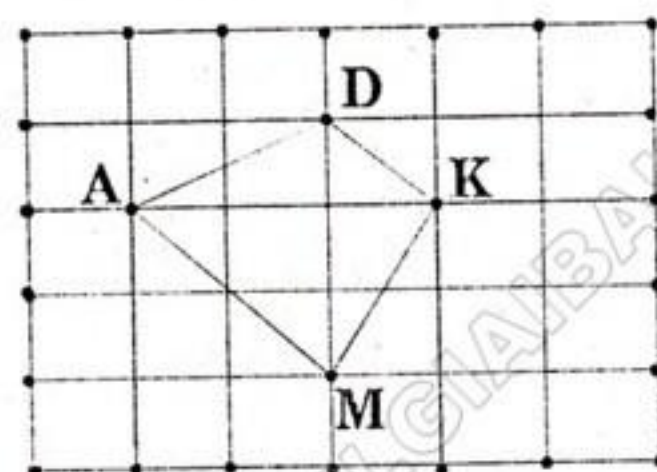


Hình 32

### Giải

Gọi cạnh mỗi ô vuông là 1 (đơn vị độ dài)

$AK = 3$  nên chọn M sao cho  $DM = 3$  và  $AM \parallel DK$ , M là giao điểm của các dòng kẻ sao cho nó cùng ba điểm đã cho là bốn đỉnh của một hình thang cân nên M được chọn theo hình bên



## §4 . ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Đường trung bình của tam giác.

**Định lí 1.** Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.

**Định nghĩa.** Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác

**Định lí 2.** Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy

#### 2. Đường trung bình của hình thang

**Định lí 3.** Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

**Định nghĩa.** Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang

**Định lí 4.** Đường trung bình của thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.



## B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

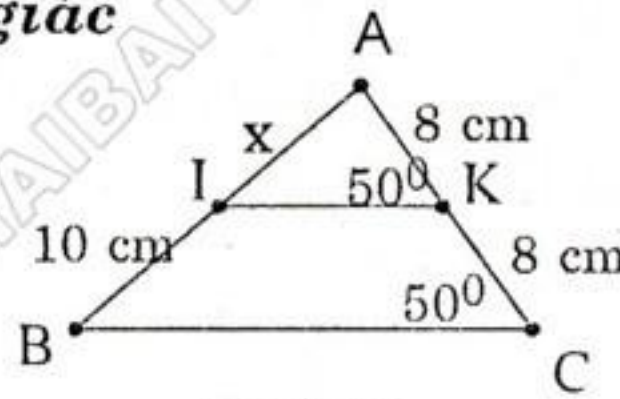
### Đường trung bình của tam giác

**Bài 20.** Tính  $x$  trên hình 41.

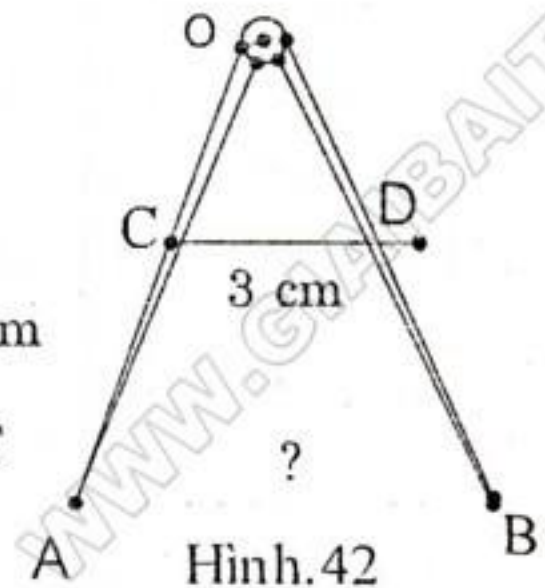
**Giải**

Ta có:  $KA = KB = 8$

$\widehat{AKI} = \widehat{ACB} = 50^\circ \Rightarrow IK \parallel BC$



Hình.41



Hình.42

$\Rightarrow$  là  $IK$  đường trung bình của  $\Delta ABC \Rightarrow IA = IB = 10 \Rightarrow x = 10$  cm

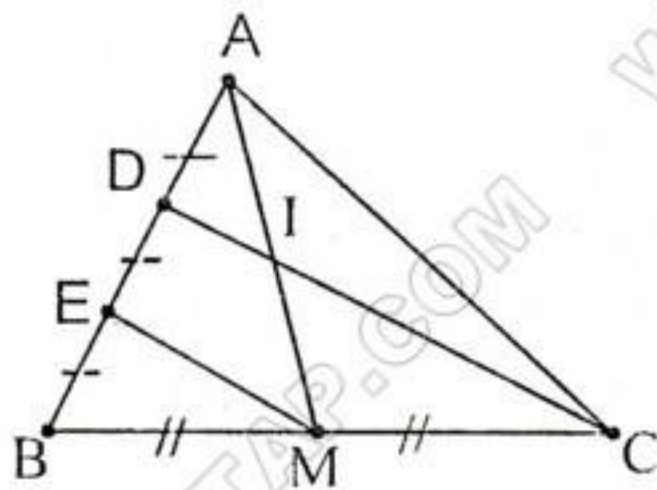
**Bài 21.** Tính khoảng cách  $AB$  giữa hai mũi của compa trên hình 42, biết rằng  $C$  là trung điểm của  $OA$ ,  $D$  là trung điểm của  $OB$  và  $CD = 3$  cm

**Giải**

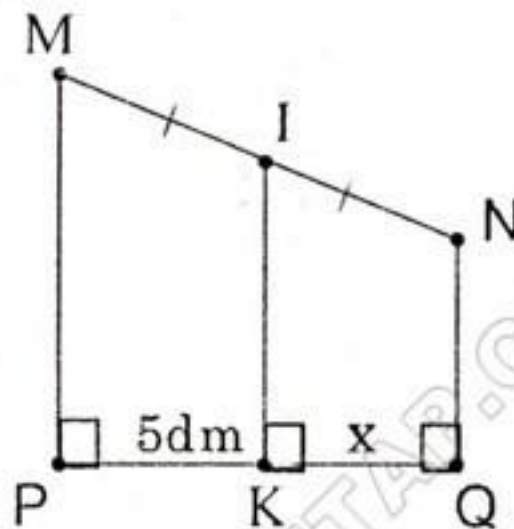
Xét  $\Delta OAB$  có  $CO = CA$  và  $DO = DB \Rightarrow CD$  là đường trung bình của

$\Delta OAB \Rightarrow CD = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = 2CD = 2.3 = 6$  cm

**Bài 22.** Cho hình 43. Chứng minh rằng  $AI = IM$



Hình.43



Hình.44

**Giải**

Xét  $\Delta BDC$  có  $MB = MC$  và  $ED = ED$  (giả thiết)  $\Rightarrow$  là  $ME$  đường trung bình của  $\Delta BDC \Rightarrow ME \parallel DC \Rightarrow DI \parallel ME$

Xét  $\Delta AEM$  có  $DA = DE$  và  $DI \parallel ME \Rightarrow AI = IM$

### Đường trung bình của hình thang

**Bài 23.** Tính  $x$  trên hình 44

**Giải**

Xét tứ giác  $MNPQ$  có  $MP \perp PQ$  và  $NQ \perp PQ \Rightarrow MP \parallel NQ \Rightarrow$  tứ giác  $MNPQ$  là hình thang

Mặt khác:  $IK \perp PQ$  và  $MP \perp PQ \Rightarrow IK \parallel MP$ ,  $MI = IN \Rightarrow IK$  là đường trung bình của hình thang  $MNPQ \Rightarrow KQ = KP = 5$  dm  $\Rightarrow x = 5$  dm

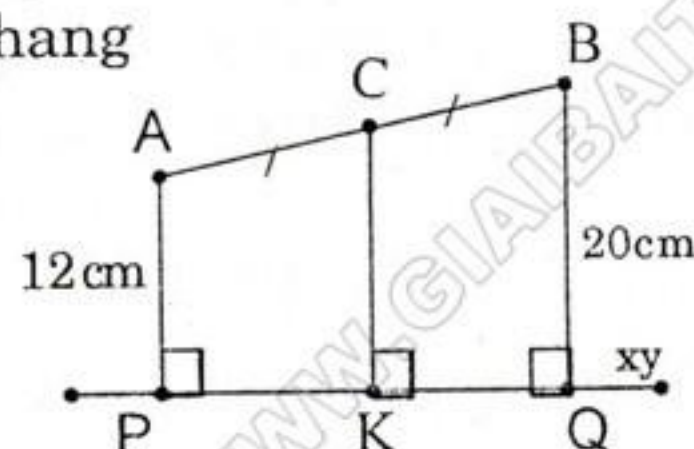
**Bài 24.** Hai điểm  $A$  và  $B$  thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng  $AB$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến  $xy$  bằng 12 cm, khoảng cách từ điểm  $B$  đến  $xy$  bằng 20 cm. Tính khoảng cách từ trung điểm  $C$  của  $AB$  đến  $xy$

**Giải**



Kẻ  $AP \perp xy$ ,  $BQ \perp xy$  và  $CK \perp xy$  lần lượt tại P, Q và K  
 $\Rightarrow AP \parallel CK \parallel BQ \Rightarrow$  tứ giác APQB là hình thang  
 Mặt khác:  $AC = CB \Rightarrow CK$  là đường trung  
 bình của hình thang APQB

$$\Rightarrow CK = \frac{AP + BQ}{2} = \frac{12 + 20}{2} = 16 \text{ cm}$$



**Bài 25.** Hình thang ABCD có đáy AB, CD. Gọi E, F, K theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, BD. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng.

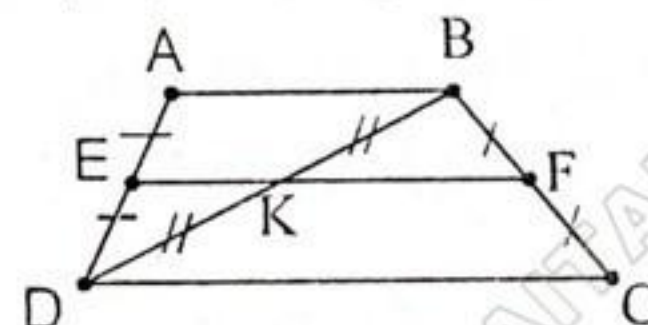
**Giải**

Ta có:  $EA = ED$  và  $KB = KD \Rightarrow EK$  là đường trung bình của  $\triangle DAB \Rightarrow EK \parallel AB$  (1)

Ta có:  $FB = FC$  và  $KB = KD \Rightarrow FK$  là đường trung bình của  $\triangle BCD \Rightarrow FK \parallel CD$  (2)

Mặt khác:  $AB \parallel CD$  (giả thiết) (3)

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow EK \parallel FK \Rightarrow EK \equiv FK \Rightarrow$  ba điểm E, K, F thẳng hàng.



**Luyện tập**

**Bài 26.** Tính x, y trên hình 45, trong đó  $AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$

**Giải**

Ta có: CD là đường trung bình của hình thang ABFE

$$\Rightarrow CD = \frac{AB + FE}{2} = \frac{8 + 16}{2} = 12 \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

FE là đường trung bình của hình thang CDHG

$$\Rightarrow FE = \frac{CD + HG}{2} \Rightarrow HG = 2FE - CD = 2 \cdot 16 - 12 = 20 \Rightarrow y = 20 \text{ cm}$$

**Bài 27.** Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, K theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC.

a) So sánh các độ dài EK và CD, KF và AB

b) Chứng minh rằng  $EF \leq \frac{AB + CD}{2}$

**Giải**

a) Ta có:  $ED = EA$  và  $KC = KA$

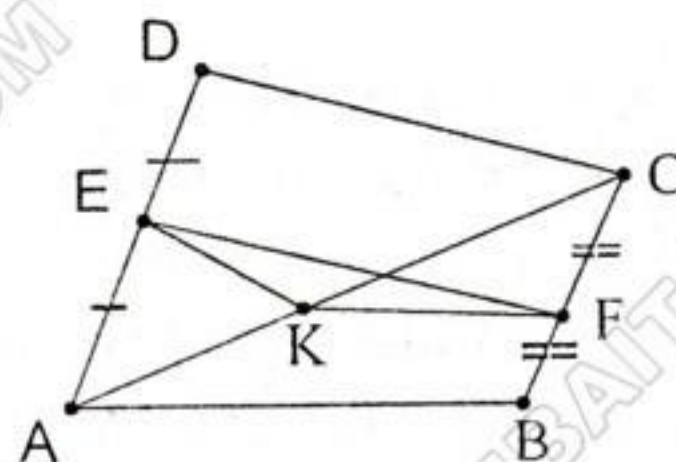
$\Rightarrow EK$  là đường trung bình của  $\triangle ADC$

$$\Rightarrow EK = \frac{1}{2} CD$$

Ta có:  $FC = FB$  và  $KC = KA$

$\Rightarrow FK$  là đường trung bình của  $\triangle CAB$

$$\Rightarrow KF = \frac{1}{2} AB$$





b) Ta có:  $EK + KF = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB \Rightarrow EK + KF = \frac{AB + CD}{2}$

\* Khi ba điểm E, K, F thẳng hàng thì  $EK + KF = EF = \frac{AB + CD}{2}$

\* Khi ba điểm E, K, F không thẳng hàng thì  $EK + KF > EF = \frac{AB + CD}{2}$

Suy ra:  $EF \leq \frac{AB + CD}{2}$

**Bài 28.** Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ), E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC. Đường thẳng EF cắt BD ở I, cắt AC ở K.

a) Chứng minh rằng  $AK = KC$ ,  $BI = ID$

b) Cho  $AB = 6$  cm,  $CD = 10$  cm. Tính các độ dài EI, KF, IK

**Giải**

a) Ta có:  $EA = ED$  và  $FB = FC$

$\Rightarrow$  là FE đường trung bình của hình thang ABCD

$\Rightarrow FE \parallel AB \Rightarrow EI \parallel AB$

$\Rightarrow EI$  là đường trung bình của  $\triangle DAB \Rightarrow ID = IB$

Tương tự:  $FE \parallel AB \Rightarrow FK \parallel AB \Rightarrow FK$  là đường trung bình của  $\triangle CAB$

$\Rightarrow AK = KC$

b) Ta có:  $FE = \frac{AB + CD}{2} = \frac{6 + 10}{2} = 8$  (cm) và  $EI = FK = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$  (cm)

$EI + IK + KF = FE \Rightarrow IK = FE - EI - KF = 8 - 3 - 3 = 2$  (cm)

## §5. DỰNG HÌNH BẰNG THƯỚC VÀ COMPA. DỰNG HÌNH THANG

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Các bài toán dựng hình đã biết.

a. Dựng đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước.

b. Dựng một góc bằng một góc cho trước.

c. Dựng trung điểm, đường trung trực một đoạn thẳng cho trước

d. Dựng tia phân giác một góc cho trước.

e. Qua một điểm ở ngoài đường thẳng dựng một đường thẳng vuông góc với đường thẳng cho trước

f. Qua một điểm ở ngoài đường thẳng dựng một đường thẳng song song với đường thẳng cho trước

g. Dựng tam giác biết ba cạnh; biết hai cạnh và góc xen giữa; biết một cạnh và hai góc kề



## 2. Giải bài toán dựng hình

- Chỉ ra cách dựng hình đó thông qua các bài toán dựng hình đã biết.
- Chứng minh rằng hình dựng được thỏa mãn điều kiện bài toán

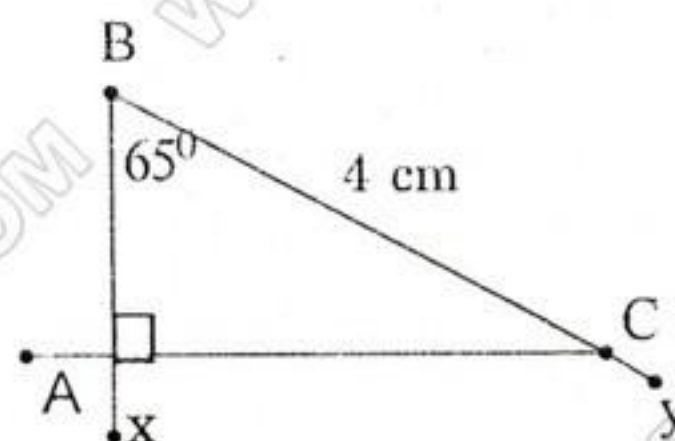
### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 29.** Dựng tam giác vuông ABC, biết cạnh huyền BC = 4 cm, góc nhọn  $\widehat{B} = 65^\circ$

**Giải**

**Cách dựng.**

- Dựng góc  $\widehat{xBy} = 65^\circ$ , đường tròn tâm B, bán kính R = 4 cm cắt tia By tại C
- Dựng đường thẳng qua C, vuông góc với tia Bx tại A. Tam giác ABC dựng được



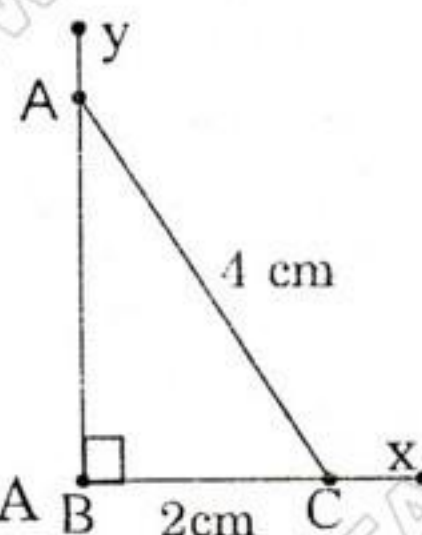
**Chứng minh.** Theo cách dựng ta có  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $\widehat{ABC} = 65^\circ$  và cạnh huyền BC = 4 cm.

**Bài 30.** Dựng tam giác ABC vuông tại B, biết cạnh huyền AC = 4 cm, cạnh góc vuông BC = 2 cm

**Giải**

**Cách dựng.**

- Dựng góc  $\widehat{xBy} = 90^\circ$ , đường tròn tâm B, bán kính R = 2 cm cắt tia Bx tại C
- Đường tròn tâm C, bán kính R = 4 cm cắt tia By tại A
- Tam giác ABC dựng được



**Chứng minh.** Theo cách dựng ta có  $\triangle ABC$  vuông tại B, BC = 2 cm và cạnh huyền AC = 4 cm.

**Bài 31.** Dựng hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ), biết  $AB = AD = 2$  cm,  $AC = DC = 4$  cm.

**Giải**

**Cách dựng.**

- Dựng tam giác ACD có AC = CD = 4 cm và AD = 2 cm
- Dựng tia At song song với CD. Đường tròn tâm A, bán kính R = 2 cm cắt tia At tại B. Hình thang ABCD dựng được.

**Chứng minh.** Theo cách dựng ta có  $AB \parallel CD$  nên ABCD là hình thang thỏa mãn:  $AB = AD = 2$  cm và  $AC = DC = 4$  cm

**Luyện tập**

**Bài 32.** Hãy dựng một góc bằng  $30^\circ$

**Giải**



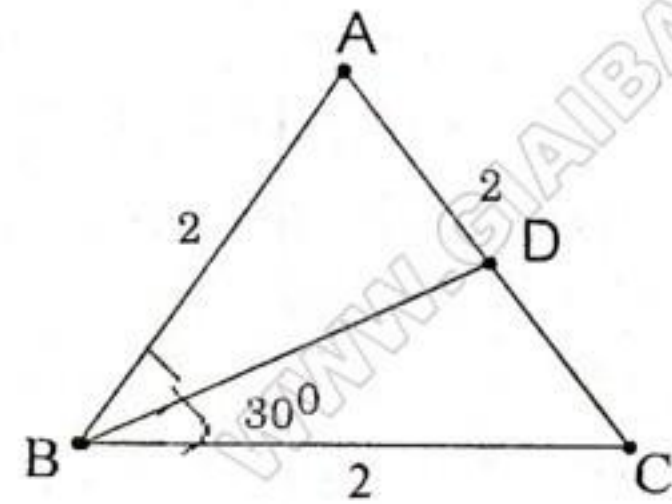
### Cách dựng.

- Dựng tam giác đều ABC có độ dài của cạnh bất kỳ, chẳng hạn bằng 2 cm

- Dựng phân giác trong của một góc bất kỳ,

Chẳng hạn góc  $\widehat{ABC}$  là tia BD

Góc  $\widehat{DBC} = 30^\circ$  là góc cần dựng



**Chứng minh.** Theo cách dựng thì  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

**Bài 33.** Dựng hình thang cân ABCD, biết đáy  $CD = 3$  cm, đường chéo

$AC = 4$  cm,  $\widehat{D} = 80^\circ$

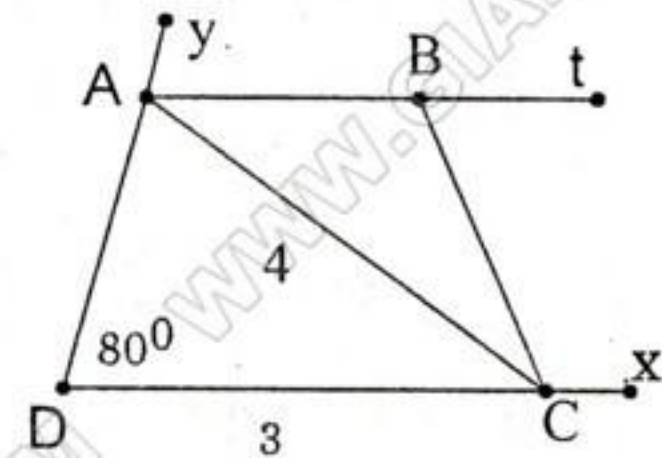
**Giải**

### Cách dựng.

- Dựng góc  $\widehat{x Dy} = 80^\circ$ , trên tia Dx dựng đoạn thẳng  $DC = 3$  cm

- Dựng đường tròn tâm C, bán kính  $R = 4$  cm cắt tia Dy tại A

- Dựng tia At song song với tia Dx và dựng đường tròn tâm D, bán kính  $R = 4$  cm cắt tia At tại B. Hình thang cân ABCD cần dựng



**Chứng minh.** Theo cách dựng ta có  $AB \parallel DC$  và  $AC = BD = 4$  cm  $\Rightarrow$  Tứ giác ABCD là hình thang cân thỏa mãn điều kiện bài toán.

**Bài 34.** Dựng hình thang ABCD, biết  $\widehat{D} = 90^\circ$ , đáy  $CD = 3$  cm, cạnh bên  $AD = 2$  cm, cạnh bên  $BC = 3$  cm

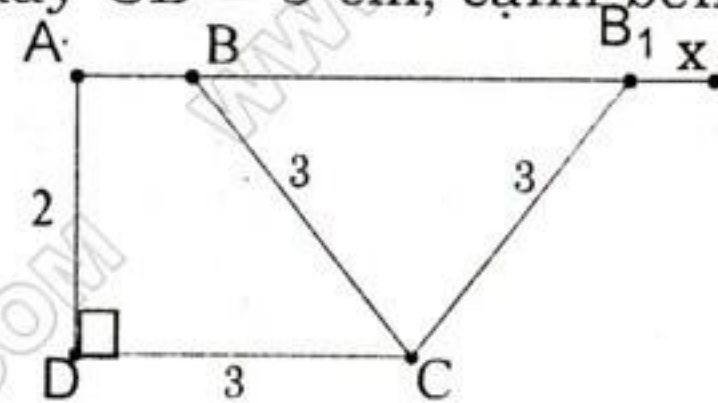
**Giải**

### Cách dựng.

- Dựng tam giác ADC vuông tại D, biết hai cạnh góc vuông  $DC = 3$  cm và  $DA = 2$  cm

- Dựng tia Ax  $\parallel$  CD (cùng phía với C đối với AD)

- Dựng đường tròn tâm C, bán kính  $R = 3$  cm cắt tia Ax tại hai điểm B và B<sub>1</sub>. Hình thang ABCD hoặc AB<sub>1</sub>CD dựng được



**Chứng minh.** Theo cách dựng, tứ giác ABCD hoặc AB<sub>1</sub>CD là hình thang vuông thỏa mãn điều kiện bài toán.



## §6 . ĐỐI XỨNG TRỰC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Hai hình đối xứng qua một đường thẳng.

- Hai điểm gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng  $d$  nếu  $d$  là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó
- Hai hình gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng  $d$  nếu mỗi điểm của hình này đối xứng qua  $d$  với một điểm của hình kia và ngược lại
- Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau

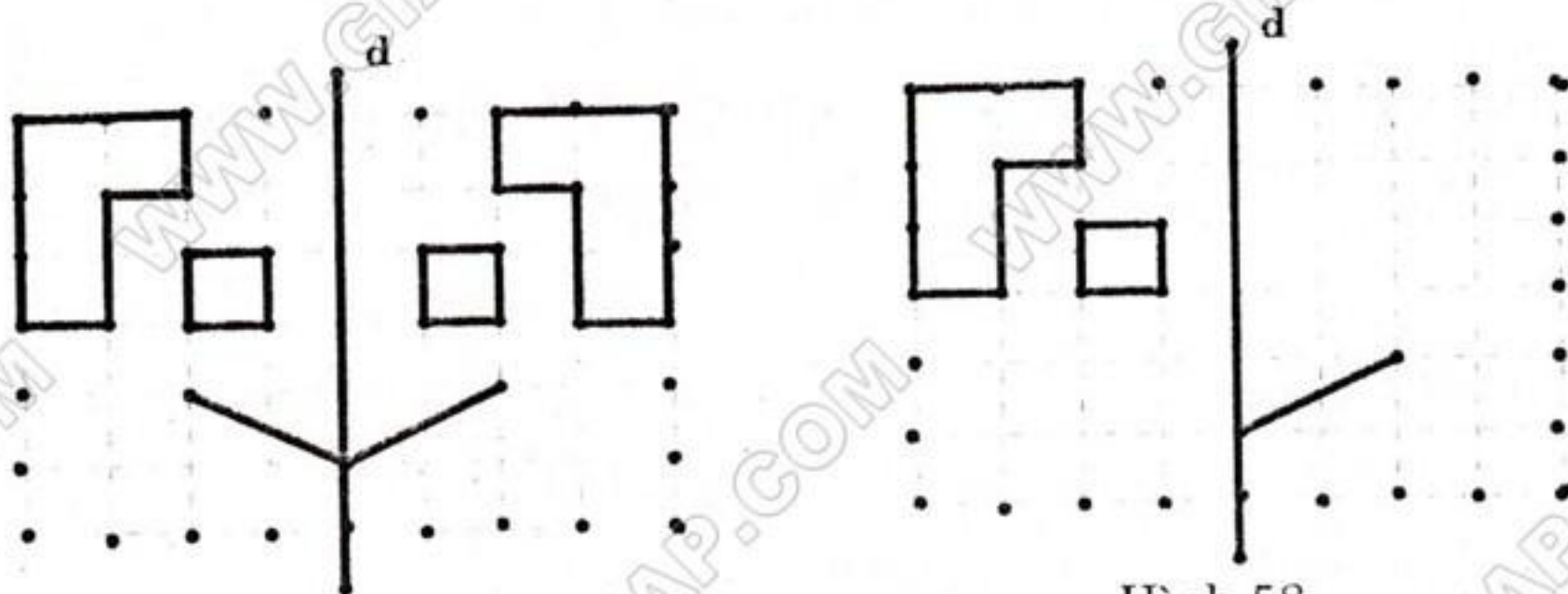
#### 2. Hình có trục đối xứng

- Đường thẳng  $d$  gọi là trục đối xứng của hình (H) nếu mỗi điểm thuộc (H) có điểm đối xứng qua  $d$  cũng thuộc (H)
- Một số trục đối xứng:
  - Một đoạn thẳng có trục đối xứng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.
  - Một góc có trục đối xứng là phân giác của góc đó.
  - Một tam giác cân có trục đối xứng là đường cao của đỉnh cân tam giác. Một tam giác đều có ba trục đối xứng
  - Đường tròn có trục đối xứng là đường thẳng đi qua tâm. Đường tròn có vô số trục đối xứng

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 35.** Vẽ hình đối xứng với các hình đã cho qua trục  $d$  (h.58)

**Giải**



Hình 58

**Bài 36.** Cho góc  $xOy$  có số đo  $50^\circ$ , điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với điểm A qua Ox, vẽ điểm C đối xứng với điểm A qua Oy.

- So sánh các độ dài OB và OC
- Tính số đo góc BOC

**Giải**



a) Điểm C đối xứng với điểm A qua Oy nên Oy là trung trực đoạn thẳng AC  $\Rightarrow OA = OC$  và  $\widehat{IOC} = \widehat{IOA}$

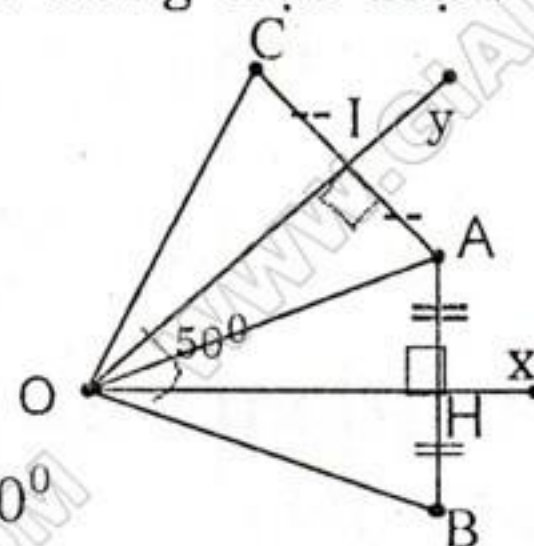
Điểm B đối xứng với điểm A qua Ox nên Ox là trung trực đoạn thẳng AB  $\Rightarrow OA = OB$  và  $\widehat{HOB} = \widehat{HOA} \Rightarrow OB = OC$

b) Ta có:  $\widehat{BOC} = \widehat{BOA} + \widehat{AOC}$

$$\widehat{IOC} = \widehat{IOA} \Rightarrow \widehat{AOC} = 2\widehat{IOA}$$

$$\widehat{HOB} = \widehat{HOA} \Rightarrow \widehat{BOA} = 2\widehat{HOA}$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2(\widehat{HOA} + \widehat{AOI}) = 2\widehat{Oy} = 2.50^\circ = 100^\circ$$



**Bài 38.** Thực hành. Cắt một tấm bìa hình tam giác cân, một tấm bìa hình thang cân. Hãy cho biết đường nào là trục đối xứng của mỗi hình, sau đó gấp mỗi tấm bìa để kiểm tra lại điều đó.

\* Đối với tam giác ABC cân tại A, trục đối xứng là đường cao AH, với H là trung điểm cạnh BC

\* Đối với hình thang cân ABCD (AB // CD), trục đối xứng là đường thẳng MN với M, N lần lượt trung điểm của AB, CD

### Luyện tập

**Bài 39.** a) Cho hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d (h.60). Gọi C là điểm đối xứng với A qua d. Gọi D là giao điểm của đường thẳng d và đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm bất kì của đường thẳng d (E khác D). Chứng minh rằng  $AD + DB < AE + EB$ .

b) Bạn Tú đang ở vị trí A, cần đến bờ sông d lấy nước rồi đi đến vị trí B (h.60). Con đường ngắn nhất mà bạn Tú nên đi là con đường nào?

### Giải

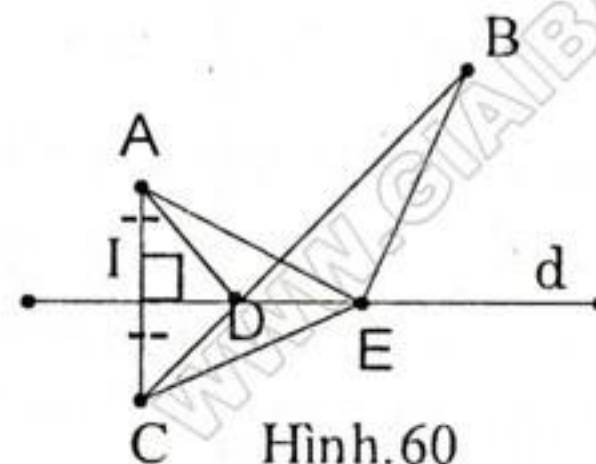
a) Ta có C đối xứng với A qua d nên

$$EC = EA \text{ và } AD = DC$$

$$AE + EB = EC + EB > BC$$

$$AD + DB = DC + DB = BC$$

$$\Rightarrow AE + EB > AD + DB$$



b) Theo câu a) ta có:  $AD + DB < AE + EB$  nên bạn Tú ở vị trí A đi thẳng đến D lấy nước rồi đi đến vị trí B là con đường ngắn nhất

**Bài 41.** Các câu sau đúng hay sai?

a) Nếu ba điểm thẳng hàng thì ba điểm đối xứng với chúng qua một trục cũng thẳng hàng.

b) Hai tam giác đối xứng với nhau qua một trục thì có chu vi bằng nhau.

c) Một đường tròn có vô số trục đối xứng.

d) Một đoạn thẳng chỉ có một trục đối xứng.

### Giải

a) Đúng. Vì ba điểm thẳng hàng thì thuộc một đường thẳng và khi đối xứng qua một trục chúng cũng thuộc một đường thẳng



- b) Đúng. Vì hai tam giác đối xứng với nhau qua một trục thì bằng nhau nên có có vi bằng nhau
- c) Đúng. Vì mọi đường thẳng đi qua tâm của đường tròn đều là trục đối xứng của đường tròn đó.

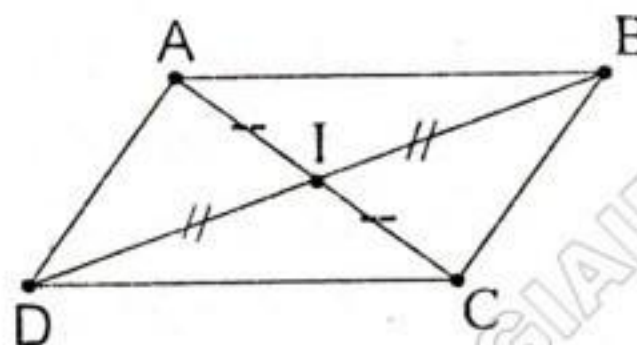
## §7. HÌNH BÌNH HÀNH

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AD // BC \end{cases}$$



#### 2. Tính chất

Định lý: Trong hình bình hành :

- Các cạnh đối bằng nhau
- Các góc đối bằng nhau
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

#### 3. Dấu hiệu nhận biết

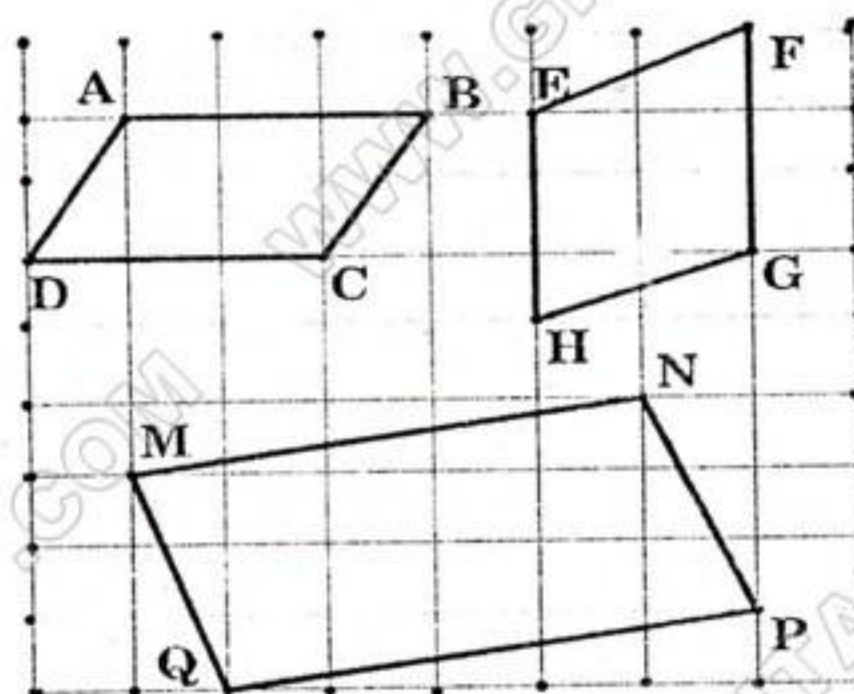
- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 43.** Các tứ giác ABCD, EFGH, MNPQ trên giấy kẻ ô vuông ở hình 71 có là hình bình hành hay không?

**Giải**

Từ hình 71, các tứ giác ABCD, EFGH, MNPQ là các hình bình hành

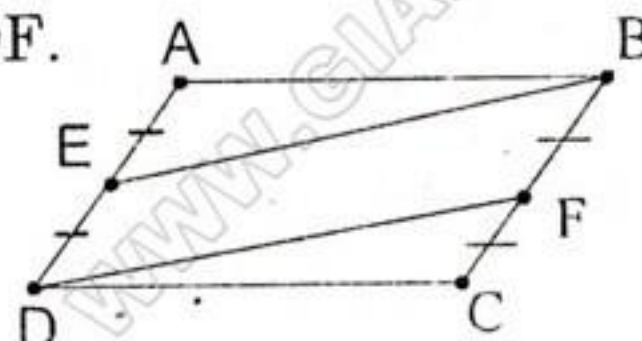


Hình 71

**Bài 44.** Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của AD. F là trung điểm của BC. Chứng minh rằng  $BE = DF$ .

**Giải**

Ta có ABCD là hình bình hành  
 $\Rightarrow AD = BC \Rightarrow EA = ED = BF = FC$





$$AD \parallel BC \Rightarrow ED \parallel BF$$

$\Rightarrow$  Tứ giác EBFD là hình bình hành  $\Rightarrow BE = DF$

**Bài 55.** Cho hình bình hành ABCD ( $AB > BC$ ). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E, tia phân giác của góc B cắt CD ở F.

- Chứng minh rằng  $DE \parallel BF$
- Tứ giác DEBF là hình gì? Vì sao?

**Giải**

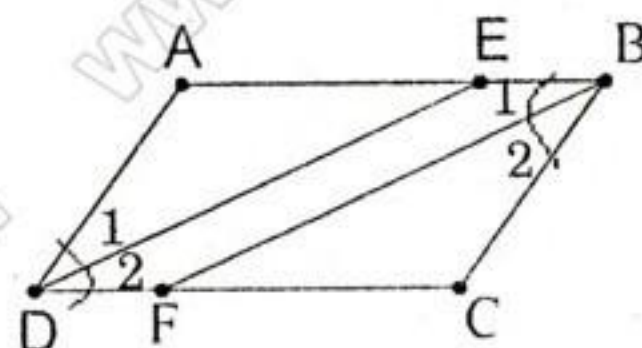
a) Ta có tứ giác ABCD là hình bình hành

$$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{B} \text{ và } \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \frac{\widehat{D}}{2}, \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{B}_1$$

Ta có:  $AB \parallel CD \Rightarrow BE \parallel FC \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{BFC} \Rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{BFC} \Rightarrow DE \parallel BF$

b) Ta có:  $BE \parallel DF$  và  $DE \parallel BF \Rightarrow$  tứ giác DEBF là hình bình hành



**Luyện tập**

**Bài 46.** Các câu sau đúng hay sai?

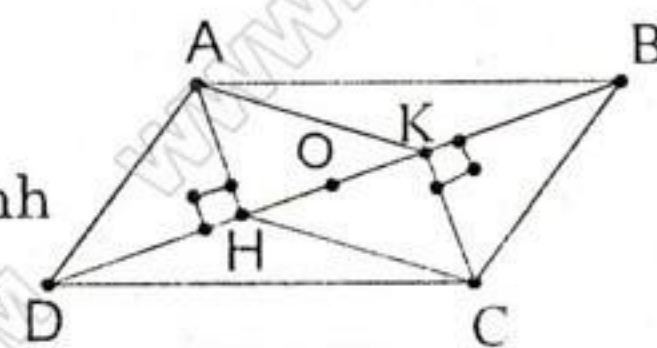
- Hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau là hình bình hành
- Hình thang có hai cạnh bên song song là hình bình hành
- Tứ giác có hai cạnh đối bằng nhau là hình bình hành
- Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau là hình bình hành

**Giải**

- Đúng. Vì hình thang có hai cạnh đáy song song và thêm giả thiết bằng nhau nên là hình bình hành
- Đúng. Vì hình thang có hai cạnh đáy song song và thêm giả thiết hai cạnh bên song song nên là hình bình hành
- Sai. Vì thiếu điều kiện song song
- Sai. Vì thiếu điều kiện song song (chẳng hạn hình thang cân)

**Bài 47.** Cho hình 72, trong đó ABCD là hình bình hành.

- Chứng minh rằng AHCK là hình bình hành
- Gọi O là trung điểm của HK. Chứng minh rằng ba điểm A, O, C thẳng hàng.



Hình.72

**Giải**

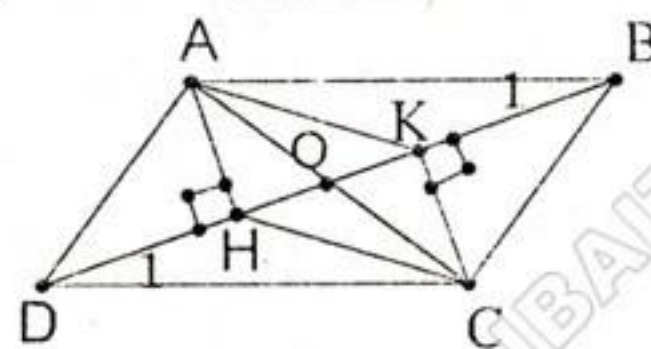
a) Xét hai tam giác vuông AHB và CKD

$$\text{có } \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \text{ (so le trong)}$$

$$AB = CD \Rightarrow \triangle AHB = \triangle CKD \Rightarrow AH = CK$$

$$\text{Mặt khác: } AH \perp BD, CK \perp BD \Rightarrow AH \parallel CK$$

Suy ra: Tứ giác AHCK là hình bình hành





- b) Ta có tứ giác AHCK là hình bình hành nên hai đường chéo AC và HK cắt nhau tại trung điểm O của HK. Suy ra O cũng là trung điểm của AC hay ba điểm A, O, C thẳng hàng.

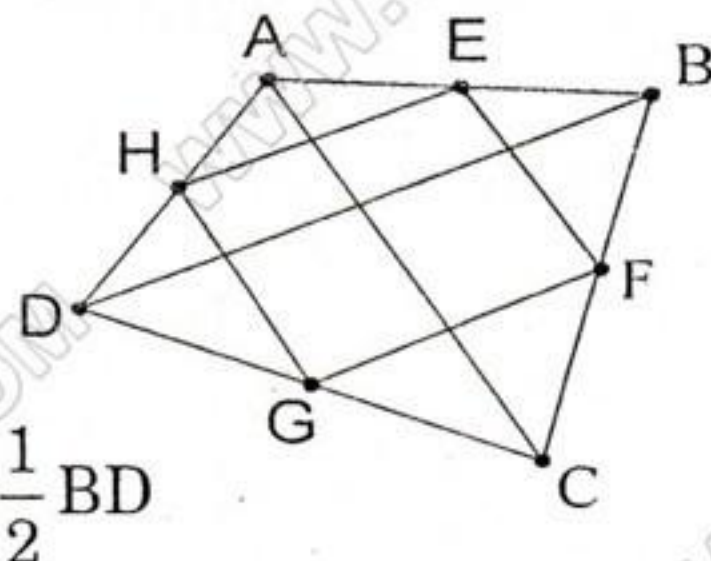
**Bài 48.** Tứ giác ABCD có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì? Tại sao?

**Giải**

Ta có:  $AE = EB$  và  $AH = HD \Rightarrow EH$  là đường trung bình  $\triangle ABD \Rightarrow EH \parallel BD$  và  $EH = \frac{1}{2}BD$

Tương tự:  $BF = CF$  và  $CG = DG \Rightarrow FG$  là đường trung bình  $\triangle CBD \Rightarrow FG \parallel BD$  và  $FG = \frac{1}{2}BD$

Suy ra:  $EH = FG$  và  $EH \parallel FG \Rightarrow$  tứ giác EFGH là hình bình hành



**Bài 49.** Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của CD, AB. Đường chéo BD cắt AI, CK theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng:

a)  $AI \parallel CK$

b)  $DM = MN = NB$

**Giải**

a) Tứ giác ABCD là hình bình hành

Suy ra:  $AB \parallel CD$  và  $AB = CD$

Ta có:  $AK = KB$  và  $DI = IC$

$\Rightarrow AK \parallel CI$  và  $AK = CI$

$\Rightarrow$  tứ giác AKCI là hình bình hành  $\Rightarrow AI \parallel CK$

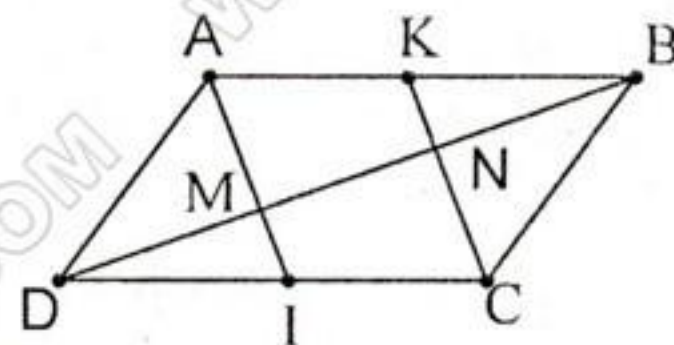
b) Ta có:  $DI = IC$  và  $IM \parallel CN \Rightarrow IM$  là đường trung bình của  $\triangle DCN$

$\Rightarrow MD = MN$  (1)

Tương tự:  $AK = KB$  và  $KN \parallel AM \Rightarrow KN$  là đường trung bình của  $\triangle BAM$

$\Rightarrow BN = MN$  (2)

Từ (1) và (2) ta có:  $DM = MN = NB$



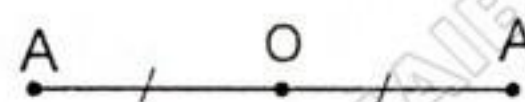
## §8 . ĐỐI XỨNG TÂM

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Hai điểm đối xứng qua một điểm.

- Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

- A đối xứng A' qua O  $\Leftrightarrow OA = OA' = \frac{AA'}{2}$



- Điểm đối xứng của điểm O qua điểm O cũng là điểm O.



## 2. Hai hình đối xứng qua một điểm.

- Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng qua O với một điểm thuộc hình kia và ngược lại.
- Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau.

## 3. Tâm đối xứng của một hình

- Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình F nếu mỗi điểm thuộc hình F có điểm đối xứng qua O cũng thuộc hình F.
- Hình bình hành nhận giao điểm của hai đường chéo làm tâm đối xứng.

## B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 50.** Vẽ điểm A' đối xứng với A qua B, vẽ điểm C' đối xứng với C qua B (h.81).

**Giải**

\* Vẽ đoạn thẳng AB và kéo dài về phía B,

chọn điểm A' sao cho B là trung điểm AA'

\* Vẽ đoạn thẳng CB và kéo dài về phía B, chọn điểm C' sao cho B là trung điểm CC'

**Bài 51.** Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm H có tọa độ (3;2). Hãy vẽ điểm K đối xứng với H qua gốc tọa độ và tìm tọa độ của K.

**Giải**

Xác định điểm H (3;2) trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Điểm K đối xứng với H qua gốc tọa độ nên tọa độ của điểm K là (-3; -2)

**Bài 52.** Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với D qua điểm A, F là điểm đối xứng với D qua điểm C. Chứng minh rằng điểm E đối xứng với điểm F qua điểm B

**Giải**

Tứ giác ABCD nên  $AB \parallel CD$  và  $AB = CD$  và  $AD \parallel BC$

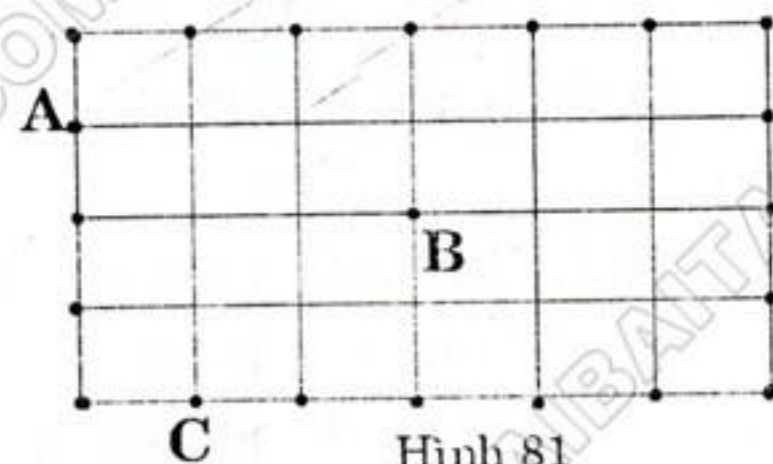
F đối xứng với D qua C nên  $CD = CF$   
 $\Rightarrow AB \parallel CF$  và  $AB = CF \Rightarrow ABFC$  là hình bình hành  $\Rightarrow AC \parallel BF$  và  $AC = BF$  (1)

Tương tự:  $BC \parallel AD$  và  $BC = AD$  (ABCD là hình bình hành)

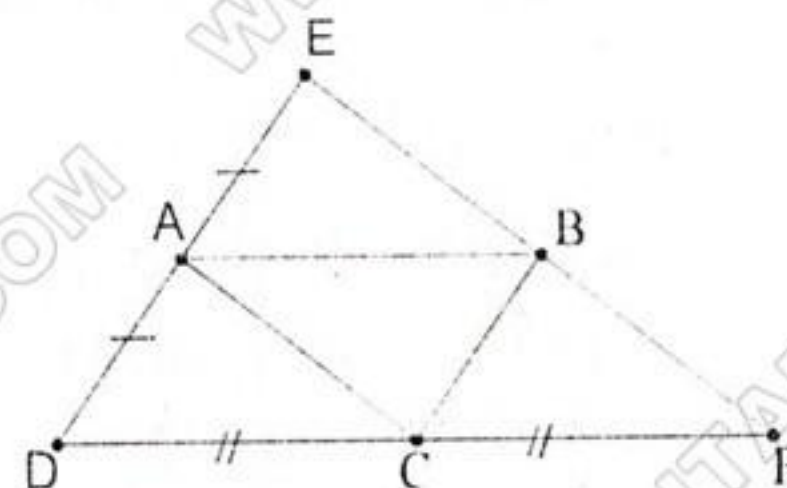
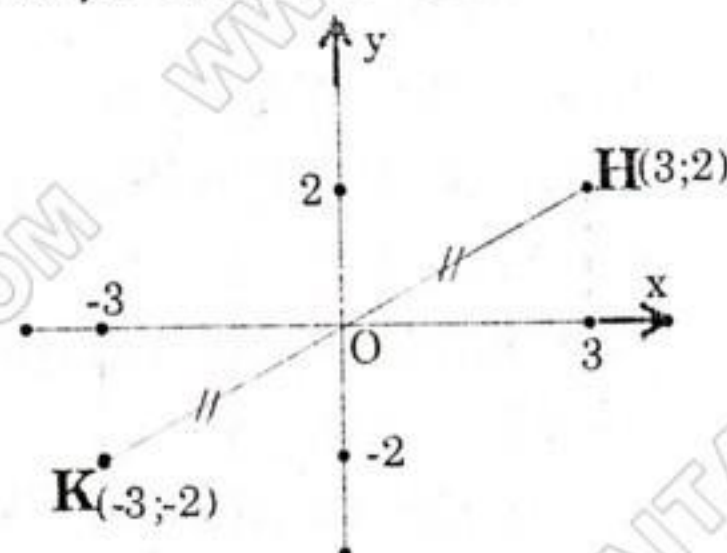
$AD = AE$  (E đối xứng với D qua A)

$\Rightarrow AE \parallel BC$  và  $AE = BC \Rightarrow AEBC$  là hình bình hành

$\Rightarrow AC \parallel EB$  và  $AC = EB$  (2)



Hình 81





Từ (1) và (2) ta có:  $BF = BE$  và  $E, B, F$  thẳng hàng nên điểm  $E$  đối xứng với điểm  $F$  qua điểm  $B$

**Bài 53.** Cho hình 82, trong đó  $MD \parallel AB$  và  $ME \parallel AC$ . Chứng minh rằng điểm  $A$  đối xứng với điểm  $M$  qua điểm  $I$ .

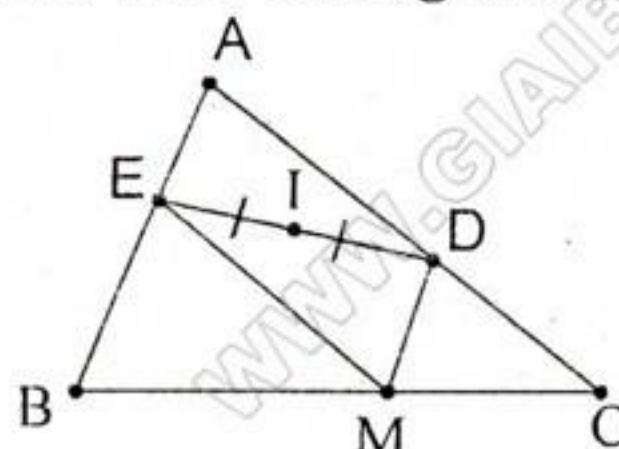
**Giải**

Ta có:  $MD \parallel AB$  và  $ME \parallel AC$

$\Rightarrow AEMD$  là hình bình hành

Suy ra hai đường chéo  $ED$  và  $MA$  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Mà  $I$  là trung điểm của  $ED$ . Suy ra  $I$  cũng là trung điểm của  $MA$  nên điểm  $A$  đối xứng với điểm  $M$  qua điểm  $I$ .



Hình.82

**Luyện tập**

**Bài 54.** Cho góc vuông  $xOy$ , điểm  $A$  nằm trong góc đó. Gọi  $B$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $Ox$ , gọi  $C$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $Oy$ . Chứng minh rằng điểm  $B$  đối xứng với điểm  $C$  qua  $O$ .

**Giải**

Ta có:  $AB \perp Ox$  tại  $H$  ( $B$  đối xứng với  $A$  qua  $Ox$ ) và  $AH = BH$

$EO \perp OH$  (Góc  $xOy$  vuông)  $\Rightarrow EO \parallel AB$

$AC \perp Oy$  tại  $E$  ( $C$  đối xứng với  $A$  qua  $Oy$ )

và  $AE = CE \Rightarrow HO \parallel AC$

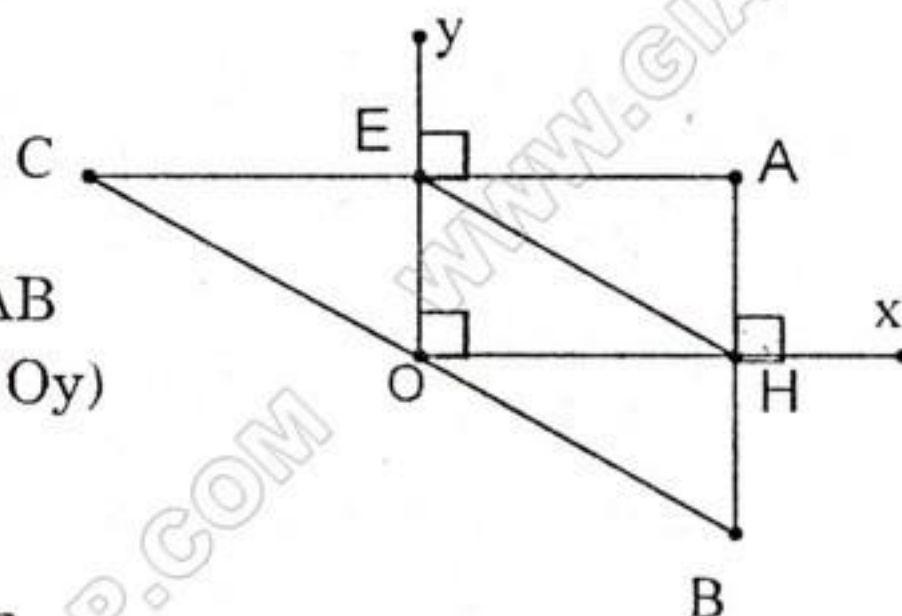
$\Rightarrow OHAE$  là hình bình hành

$\Rightarrow AH = OE \Rightarrow BH = OE$  và  $BH \parallel OE$

$\Rightarrow OEHB$  là hình bình hành  $\Rightarrow EH = OB$  và  $EH \parallel OB$

Tương tự:  $CEHO$  là hình bình hành  $\Rightarrow EH = OC$  và  $EH \parallel OC$

$\Rightarrow OB = OC$  và  $C, O, B$  thẳng hàng  $\Rightarrow$  điểm  $B$  đối xứng với điểm  $C$  qua  $O$



**Bài 55.** Cho hình bình hành  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua  $O$  cắt các cạnh  $AB$  và  $CD$  theo thứ tự ở  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng điểm  $M$  đối xứng với điểm  $N$  qua  $O$ .

**Giải**

Ta có:  $AB \parallel CD$  ( $ABCD$  là hình bình hành)

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{NDB}$  (so le trong)

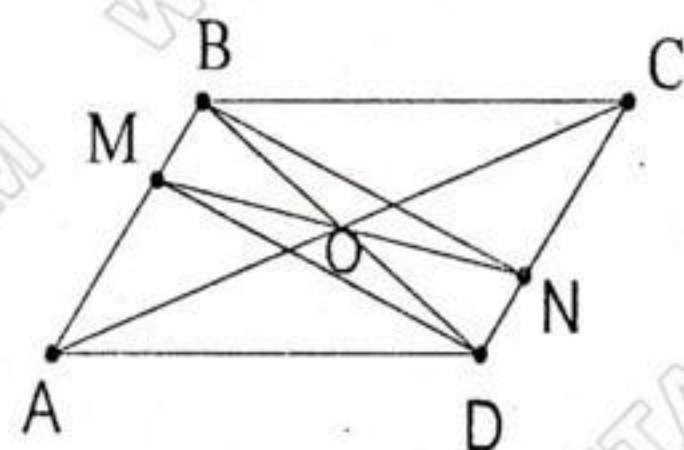
$BO = DO$  và  $\widehat{BOM} = \widehat{DON}$  (đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle BOM = \triangle DON$  (g.c.g)  $\Rightarrow BM = DN$

Mặt khác:  $AB \parallel CD \Rightarrow BM \parallel DN \Rightarrow$  tứ giác  $BMDN$  là hình bình hành

Hai đường chéo  $BD$  và  $MN$  cắt nhau tại trung điểm  $O \Rightarrow OM = ON$

$\Rightarrow$  điểm  $M$  đối xứng với điểm  $N$  qua  $O$



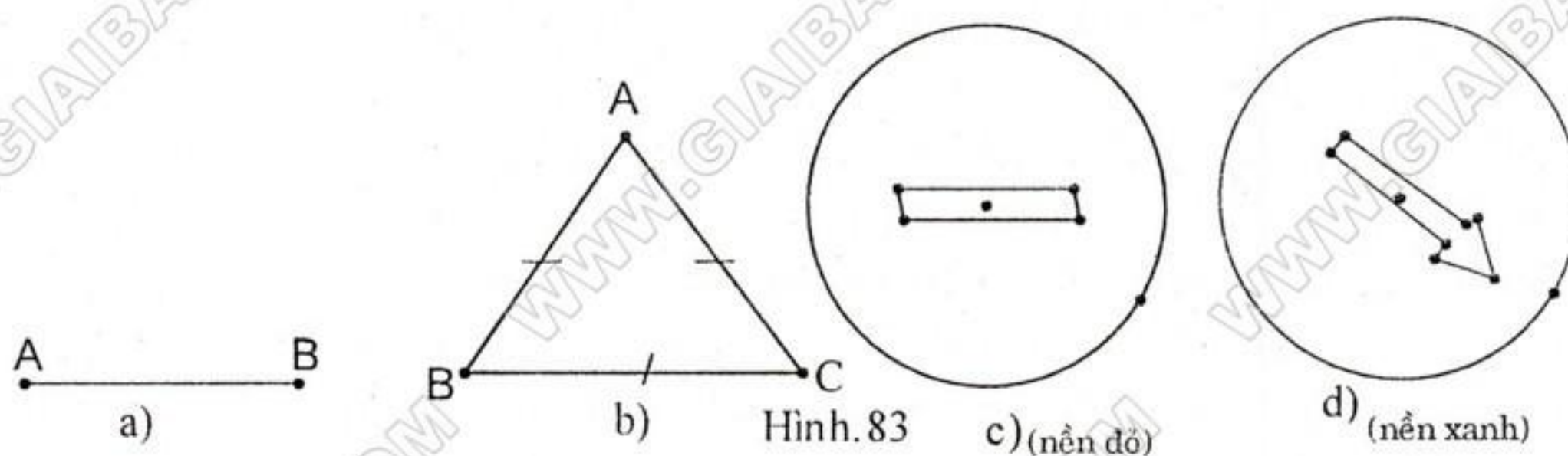
**Bài 56.** Trong các hình sau, hình nào có tâm đối xứng?

a) Đoạn thẳng  $AB$  (h.83a)

b) tam giác đều  $ABC$  (h.83b)



- c) Biển cấm đi ngược chiều (h.83c)  
d) Biển chỉ đường đi vòng tránh chướng ngại vật (h.83d)



### Giải

- a) Đoạn thẳng AB có tâm đối xứng là trung điểm của AB  
b) Tam giác đều không có tâm đối xứng  
c) Biển cấm đi ngược chiều có tâm đối xứng là tâm của đường tròn  
d) Biển chỉ đường đi vòng tránh chướng ngại vật không có tâm đối xứng

**Bài 57.** Các câu sau đúng hay sai?

- a) Tâm đối xứng của một đường thẳng là điểm bất kì của đường thẳng đó.  
b) Trọng tâm của một tam giác là tâm đối xứng của tam giác đó.  
c) Hai tam giác đối xứng với nhau qua một điểm thì có chu vi bằng nhau.

### Giải

- a) Đúng      b) sai  
c) Đúng vì hai tam giác đối xứng với nhau qua một điểm thì bằng nhau nên có chu vi bằng nhau.

## §9 . HÌNH CHỮ NHẬT

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

**1. Định nghĩa:** Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

$$ABCD \text{ là hình chữ nhật } \Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases}$$

**2. Tính chất**

- Hình chữ nhật có tất cả tính chất của hình bình hành và hình thang cân.
- Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau

**3. Dấu hiệu nhận biết**

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật



- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật

#### 4. Áp dụng vào tam giác

- Trong một tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.

- Nếu một tam giác có trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

#### 5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

\* **Định nghĩa:** Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song  $a$  và  $b$  là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

\* **Định lý:** (Về các đường thẳng song song cách đều), Các đường thẳng song song cách đều chắn trên một đường thẳng bất kì các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.

\* **Tính chất:** Các điểm có khoảng cách không đổi  $h$  đến đường thẳng  $d$  cố định thì nằm trên hai đường thẳng song song với  $d$  và cách  $d$  một khoảng bằng  $h$ .

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 58.** Điền vào chỗ trống, biết rằng  $a$ ,  $b$  là độ dài các cạnh,  $d$  là độ dài đường chéo của một hình chữ nhật.

$a$	5	...	$\sqrt{13}$
$b$	12	$\sqrt{6}$	...
$d$	...	$\sqrt{10}$	7

**Giải**

Áp dụng định lý Pi-ta-go:  $d^2 = a^2 + b^2$

\* Với  $a = 5$ ,  $b = 12$  thì  $d^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow d = \sqrt{169} = 13$

\* Với  $b = \sqrt{6}$ ,  $d = \sqrt{10}$  thì

$$(\sqrt{10})^2 = a^2 + (\sqrt{6})^2 \Rightarrow a^2 = 10 - 6 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2$$

\* Với  $a = \sqrt{13}$ ,  $d = 7$  thì

$$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = d^2 - a^2 = 7^2 - (\sqrt{13})^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

**Bài 59.** Chứng minh rằng:

a) Giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật là tâm đối xứng của hình chữ nhật đó.

b) Hai đường thẳng đi qua trung điểm hai cặp cạnh đối của hình chữ nhật là hai trục đối xứng của hình chữ nhật đó.

**Giải**



a) Ta biết giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình đó. Hình chữ nhật cũng là hình bình hành nên giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng của hình chữ nhật đó.

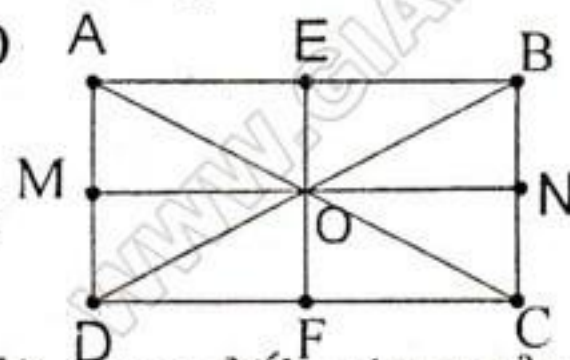
b) Xét hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC, AB và CD, O là giao điểm của AC và BD

Ta có:  $\triangle OAB, \triangle ODC, \triangle OAD, \triangle OBC$  cân tại O

Suy ra: EF là trục đối xứng của  $\triangle OAB, \triangle ODC$  nên

cũng là trục đối xứng của hình chữ nhật ABCD

MN là trục đối xứng của  $\triangle OAD, \triangle OBC$  nên cũng là trục đối xứng của hình chữ nhật ABCD



**Bài 60.** Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 7cm và 24cm.

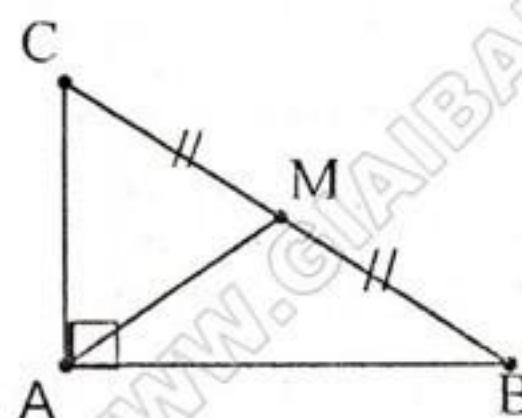
**Giải**

Xét tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AM

Ta có:  $AM = \frac{1}{2}BC$

Mặt khác:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 24^2 + 7^2 = 625$

$\Rightarrow BC = \sqrt{625} = 25 \Rightarrow AM = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ (cm)}$



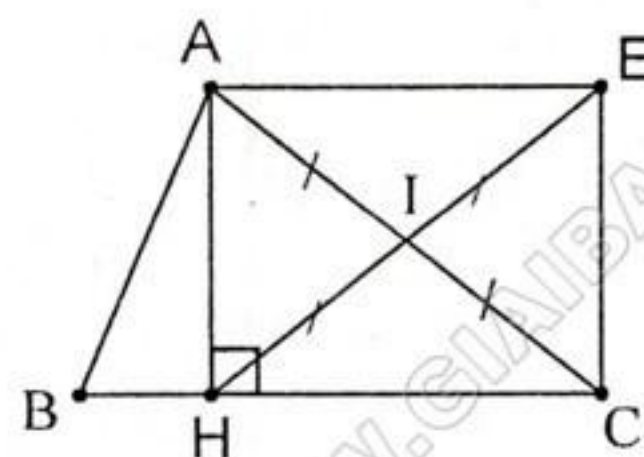
**Bài 61.** Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I. Tứ giác AHCE là hình gì? Vì sao?

**Giải**

Ta có:  $AI = IC$  và  $HI = IE \Rightarrow$  Tứ giác AHCE là hình bình hành

Mặt khác:  $AH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác AHCE là hình chữ nhật



**Luyện tập**

**Bài 62.** Các câu sau đúng hay sai?

a) Nếu tam giác ABC vuông tại điểm C thì điểm C thuộc đường tròn có đường kính là AB (h.88).

b) Nếu điểm C thuộc đường tròn có đường kính là AB (C khác A và B) thì tam giác ABC vuông tại C (h.89).

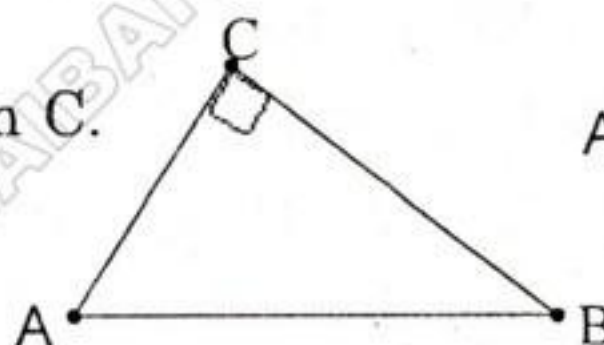
**Giải**

a) Đúng b) Đúng

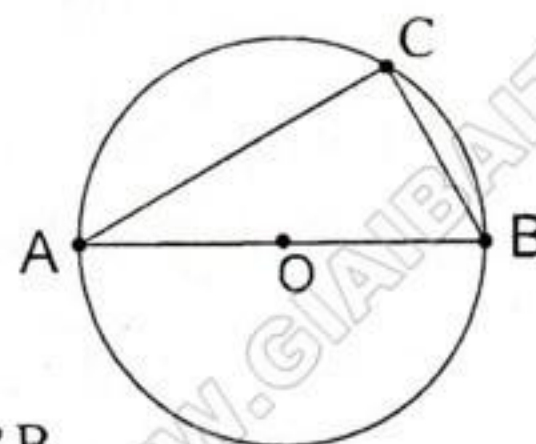
\* Tam giác ABC vuông tại điểm C.

Gọi O là trung điểm của AB,

Ta có:  $OC = OA = OB = \frac{AB}{2}$



Hình.88



Hình.89

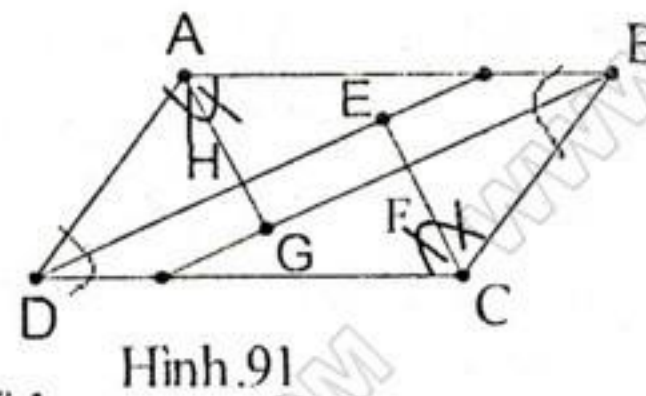
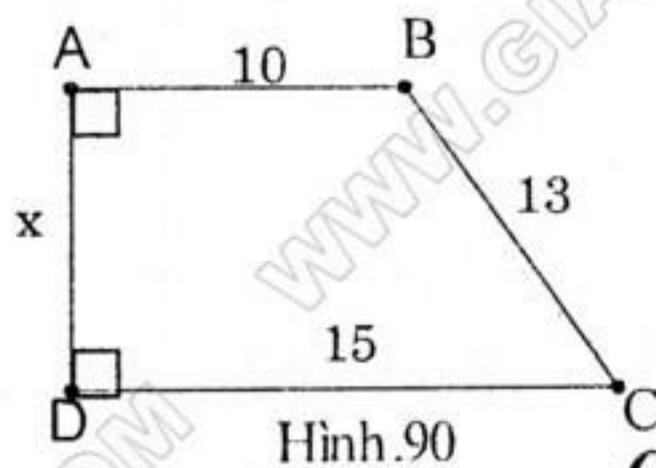
Suy ra: điểm C thuộc đường tròn có đường kính là AB



\* Điểm C thuộc đường tròn có đường kính là AB  $\Rightarrow OC = OA = OB = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow \triangle ABC$  vuông tại C

**Bài 63.** Tìm x trên hình 90.

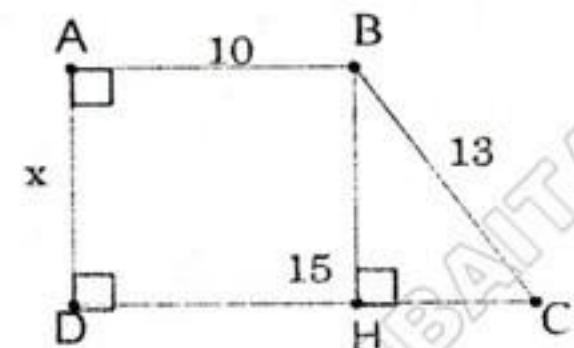


**Giải**

\* Hình 90) Kẻ  $BH \perp CD \Rightarrow$  tứ giác ABHD là hình chữ nhật  $\Rightarrow AD = BH$  và  $DH = AB$   
 $\Rightarrow CH = DC - DH = 15 - 10 = 5$

Xét  $\triangle BHC$ :  $BC^2 = BH^2 + HC^2$

$\Rightarrow BH^2 = BC^2 - HC^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow BH = 12 \Rightarrow x = 12$



**Bài 64.** Cho hình bình hành ABCD. Các tia phân giác của các góc A, B, C, D cắt nhau như trên hình 91. Chứng minh rằng EFGH là hình chữ nhật.

**Giải**

Ta có tứ giác ABCD là hình bình hành

$\Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} = \hat{D} + \hat{C} = 180^\circ$

AG, DE là phân giác góc A, D nên

$$\widehat{HAD} + \widehat{HDA} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{D}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{AHD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{GHE} = \widehat{AHD} = 90^\circ$  (1)

CE, BG là phân giác góc C, B nên

$$\widehat{FCB} + \widehat{FBC} = \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C} + \hat{B}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{CFB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EFG} = \widehat{CFB} = 90^\circ$  (2)

CE, BG là phân giác góc C, B nên

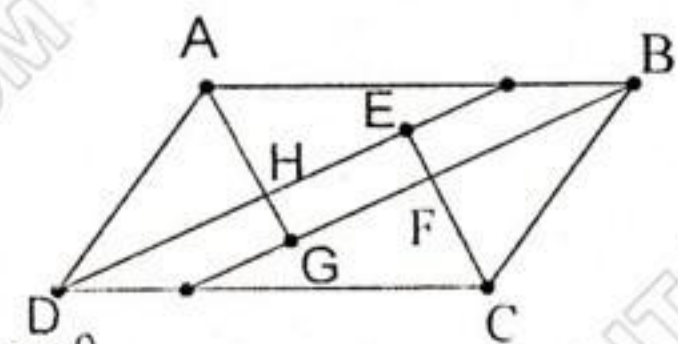
$$\widehat{FCB} + \widehat{FBC} = \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C} + \hat{B}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{CFB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EFG} = \widehat{CFB} = 90^\circ$  (2)

DE, CE là phân giác góc D, C nên

$$\widehat{EDC} + \widehat{ECD} = \frac{\hat{D}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{D} + \hat{C}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{DEC} = 90^\circ$  (3)





Từ (1), (2), (3) ta có tứ giác EFGH có ba góc vuông  $\Rightarrow$  tứ giác EFGH là hình chữ nhật.

**Bài 65.** Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?

**Giải**

Ta có EH là đường trung bình  $\triangle ABD$

$$\Rightarrow EH \parallel BD \text{ và } EH = \frac{1}{2}BD$$

Ta có FG là đường trung bình  $\triangle CBD$

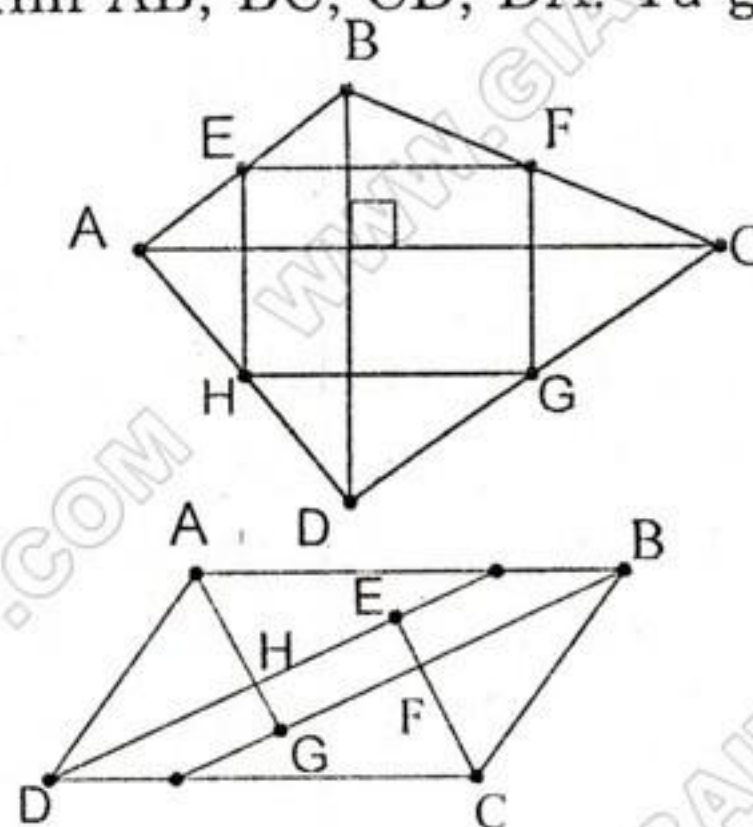
$$\Rightarrow FG \parallel BD \text{ và } FG = \frac{1}{2}BD$$

$\Rightarrow$  Tứ giác EFGH là hình bình hành  $\Rightarrow HG \parallel EF$

Mặt khác: HG là đường trung bình  $\triangle DAC \Rightarrow HG \parallel AC$

$$DB \perp AC \Rightarrow HG \perp HE \Rightarrow \widehat{EHG} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$  Tứ giác EFGH là hình chữ nhật



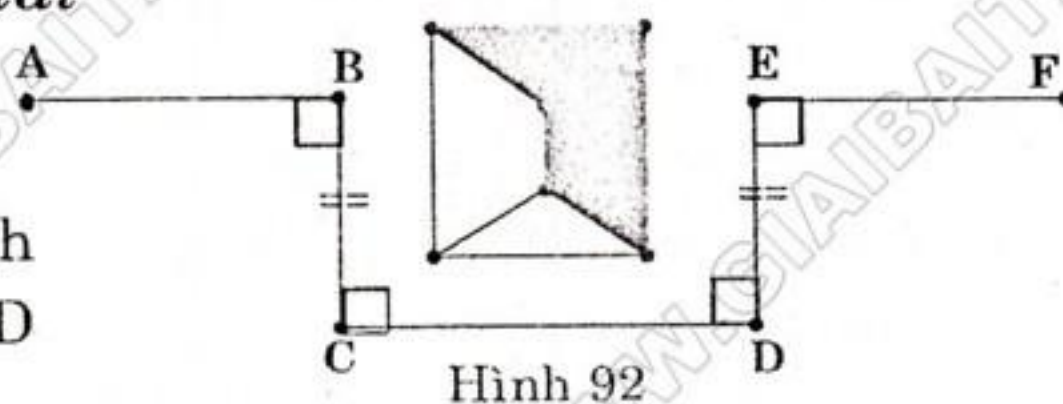
**Bài 66.** Đố. Một đội công nhân đang trồng cây trên đoạn đường AB thì gặp chướng ngại vật che lấp tầm nhìn (h.92). Đội đã dựng các điểm C, D, E như trên hình vẽ rồi trồng cây tiếp trên đoạn đường EF vuông góc với DE. Vì sao AB và EF cùng nằm trên một đường thẳng?

**Giải**

Ta có:  $BC \perp CD$  và  $ED \perp CD$

$$\Rightarrow BC \parallel ED$$

$BC = ED \Rightarrow$  tứ giác BCDE là hình chữ nhật  $\Rightarrow BE \perp BC$  và  $BE \perp ED$



Hình 92

Mặt khác:  $AB \perp BC \Rightarrow$  đường thẳng BE trùng với đường thẳng AB

$EF \perp ED \Rightarrow$  đường thẳng EF trùng với đường thẳng EB

Suy ra: bốn điểm A, B, E, F cùng nằm trên một đường thẳng

## §10. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

**1.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia



2. Các điểm cách đường thẳng  $b$  một khoảng bằng  $h$  nằm trên hai đường thẳng song song với  $b$  và cách  $b$  một khoảng bằng  $h$
3. Nếu các đường thẳng song song cắt đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau
4. Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

## B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 67.** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Kẻ tia  $Ax$  bất kỳ. Trên tia  $Ax$  lấy các điểm  $C, D, E$  sao cho  $AC = CD = DE$  (h.97). Kẻ đoạn thẳng  $EB$ . Qua  $C, D$  kẻ các đường thẳng song song với  $EB$ . Chứng minh rằng đoạn thẳng  $AB$  bị chia thành ba phần bằng nhau.

**Giải**

Ta có:  $AC = CD$  và  $CC' \parallel BE$

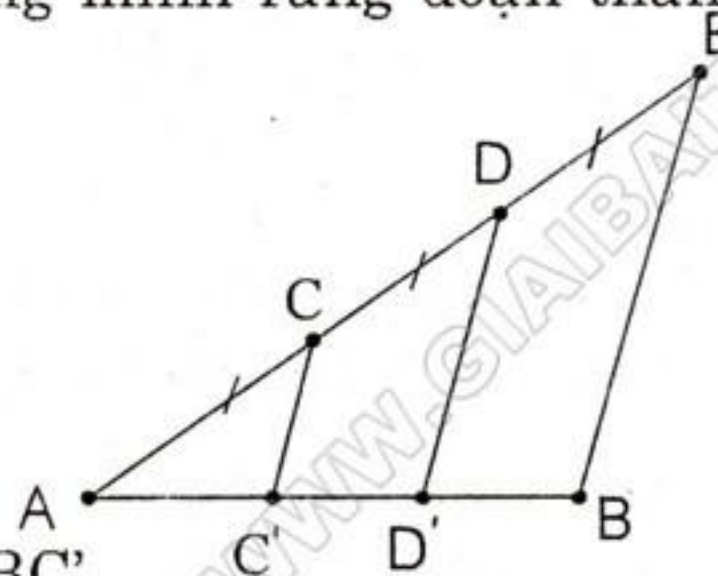
$CD = DE$  và  $DD' \parallel BE$

$\Rightarrow CC' \parallel DD'$  và  $CEBC'$  là hình thang

$\Rightarrow CC'$  là đường trung bình của  $\triangle ADD'$

$DD'$  là đường trung bình của hình thang  $CEBC'$

$\Rightarrow AC' = C'D'$  và  $C'D' = D'B \Rightarrow AC' = C'D' = D'B$



Hình.97

**Bài 68.** Cho điểm  $A$  nằm ngoài đường thẳng  $d$  và có khoảng cách đến  $d$  bằng 2 cm. Lấy điểm  $B$  bất kỳ thuộc đường thẳng  $d$ . Gọi  $C$  là điểm đối xứng với điểm  $A$  qua điểm  $B$ . Khi  $B$  di chuyển trên đường thẳng  $d$  thì điểm  $C$  di chuyển trên đường nào?

**Giải**

Kẻ  $AH \perp d \Rightarrow AH = 2$  (cm)

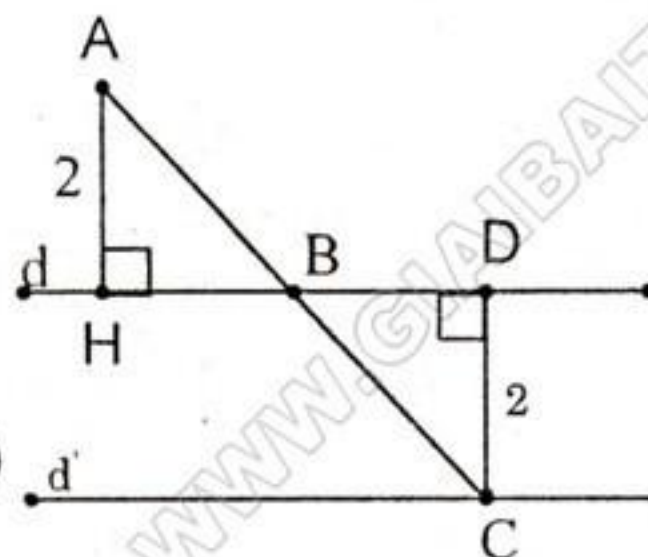
$C$  là điểm đối xứng với điểm  $A$  qua điểm  $B$

$\Rightarrow AB = BC$

Kẻ  $CD \perp d \Rightarrow \triangle AHB = \triangle CDB \Rightarrow CD = AH = 2$  (cm)

$\Rightarrow$  Điểm  $C$  nằm khác phía  $A$  đối với đường

thẳng  $d$  và cách  $d$  một khoảng bằng 2 cm. Khi  $B$  di chuyển trên đường thẳng  $d$  thì điểm  $C$  di chuyển trên đường thẳng  $d'$ , song song với  $d$  và cách  $d$  một khoảng bằng 2 cm



**Bài 69.** Ghép mỗi ý (1), (2), (3), (4) với một trong các ý (5), (6), (7), (8) để được một khẳng định đúng:

(1). Tập hợp các điểm cách điểm  $A$  cố định một khoảng bằng 3 cm

(2). Tập hợp các điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng  $AB$  cố định

(3). Tập hợp các điểm nằm trong góc  $xOy$  và cách đều hai cạnh của góc đó

(4). Tập hợp các điểm cách đường thẳng  $a$  cố định một khoảng bằng 3 cm

(5). là đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$



- (6). là hai đường thẳng song song với  $a$  và cách  $a$  một khoảng bằng 3 cm  
 (7). là đường tròn tâm A, bán kính bằng 3 cm  
 (8). là tia phân giác của góc  $xOy$

### Hướng dẫn

(1)  $\rightarrow$  (7); (2)  $\rightarrow$  (5); (3)  $\rightarrow$  (8); (4)  $\rightarrow$  (6)

### Luyện tập

**Bài 70.** Cho góc vuông  $xOy$ , điểm A thuộc tia Oy sao cho  $OA = 2\text{cm}$ . Lấy B là điểm bất kỳ thuộc Ox. Gọi C là trung điểm của AB. Khi điểm B di chuyển trên tia Ox thì điểm C di chuyển trên đường nào?

### Giải

Ta có:  $\widehat{xOy} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp OB$

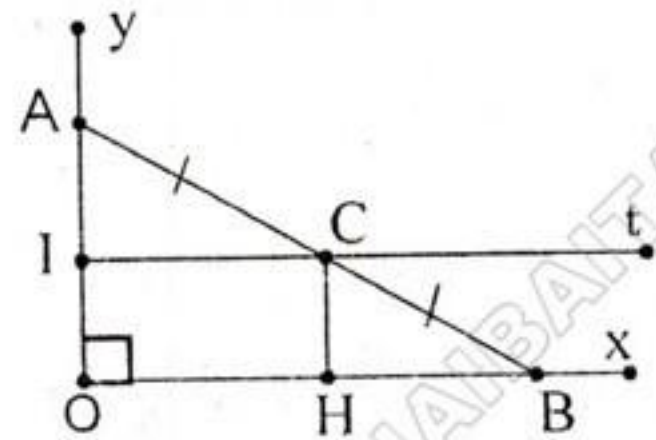
kẻ  $CH \perp OB \Rightarrow CH \parallel OA, AC = CB$

$\Rightarrow CH$  là đường trung bình  $\triangle AOB$

$$\Rightarrow CH = \frac{1}{2}OA = OH = 1 \text{ (cm)}$$

$\Rightarrow CI \parallel OB$  và cách OB một khoảng bằng  $CH = 1 \text{ (cm)}$

Nên khi điểm B di chuyển trên tia Ox thì điểm C di chuyển trên tia  $It$  song song với tia Ox và cách tia Ox một khoảng bằng 1 cm



**Bài 71.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC. Gọi MD là đường vuông góc kẻ từ M đến AB, ME là đường vuông góc kẻ từ M đến AC, O là trung điểm của DE.

a) Chứng minh rằng ba điểm O, A, M thẳng hàng.

b) Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đường nào?

c) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì AM có độ dài nhỏ nhất?

### Giải

a) Ta có:  $DM \perp AB$  và  $AC \perp AB \Rightarrow DM \parallel AC$

$ME \perp AC$  và  $AC \perp AB \Rightarrow ME \parallel AB$

$$\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAE} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$  tứ giác ADME là hình chữ nhật

O là trung điểm của đường chéo DE  $\Rightarrow$  O cũng là trung điểm của đường chéo AM  $\Rightarrow$  ba điểm O, A, M thẳng hàng.

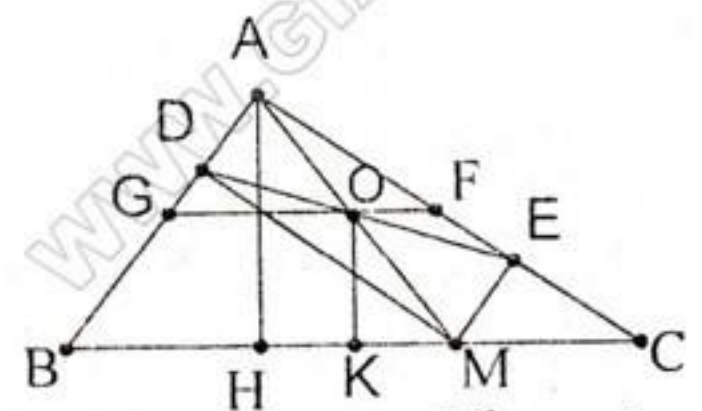
b) Kẻ  $AH \perp BC$  và  $OK \perp BC \Rightarrow OK \parallel AH$  và OK là đường trung bình của tam giác AHM  $\Rightarrow OK = \frac{1}{2}AH$

Gọi G, F lần lượt là trung điểm AB, AC thì  $GF \parallel BC \Rightarrow O \in GF$

Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đoạn thẳng GF là đường trung bình  $\triangle ABC$

c) Xét  $\triangle ABC$  có:  $AM > AH$  khi  $M \neq H$  và  $AM = AH$  khi  $M \equiv H$

$\Rightarrow AM \geq AH$  nên đoạn thẳng AM có độ dài nhỏ nhất khi  $M \equiv H$

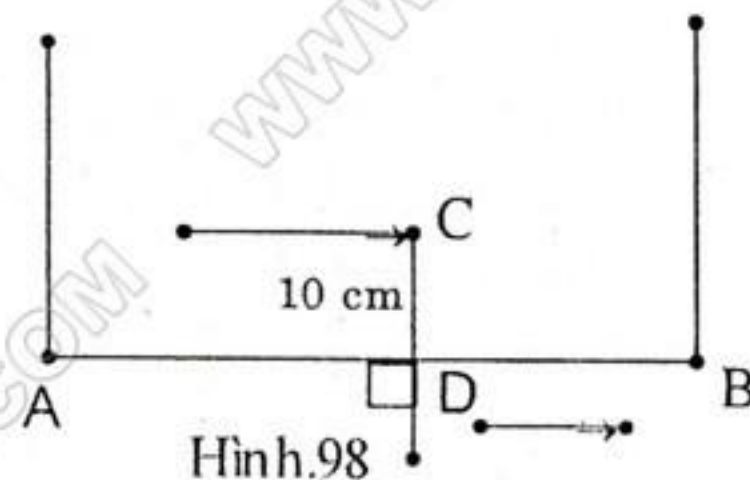




**Bài 72.** Đố. Để vạch một đường thẳng song song với mép gỗ AB và cách mép gỗ 10 cm, bác thợ mộc đặt đoạn bút chì CD dài 10 cm vuông góc với ngón tay trở lắp làm cữ (h.98), rồi đưa ngón tay trở chạy dọc theo mép gỗ AB. Căn cứ vào kiến thức nào mà ta kết luận được rằng đầu chì C vạch nên đường thẳng song song với AB và cách AB là 10 cm?

**Giải**

Điểm C cách mép gỗ AB cố định một khoảng không đổi bằng 10 cm nên điểm C thuộc đường thẳng song song với AB và cách AB một khoảng bằng 10 cm



Hình.98

## §11 . HÌNH THOI

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa.** Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.  
Tứ giác ABCD là hình thoi  $\Leftrightarrow AB = BC = CD = AD$

2. **Tính chất**

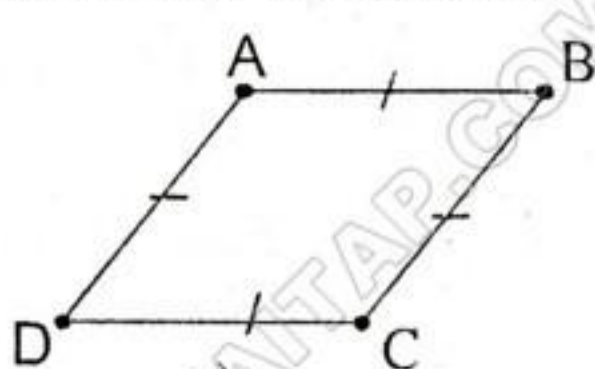
- Hình thoi có tất cả tính chất của hình bình hành.
- **Định lý:** Trong hình thoi.
  - + Hai đường chéo vuông góc với nhau
  - + Hai đường chéo là đường phân giác các góc của hình thoi.

3. **Dấu hiệu nhận biết**

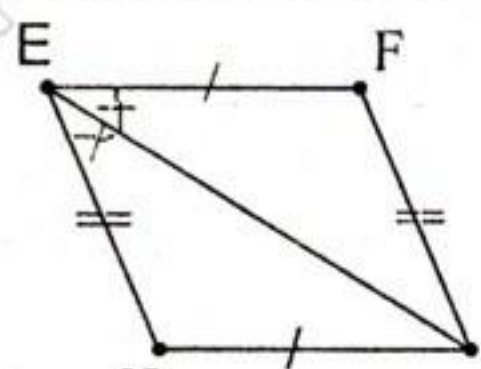
- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

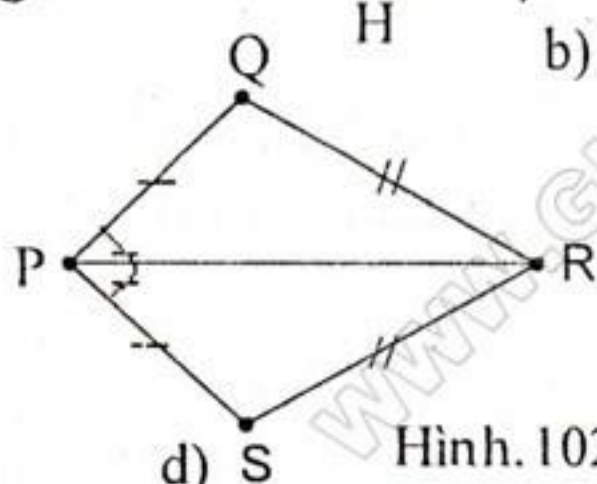
**Bài 73.** Tìm các hình thoi trên hình 102.



a)

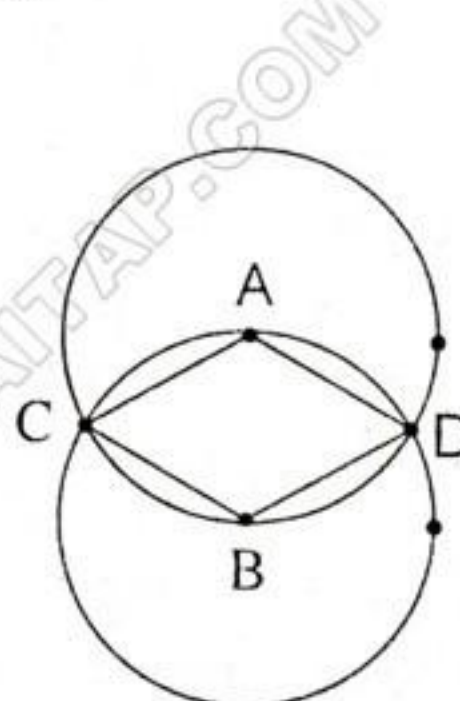


b)



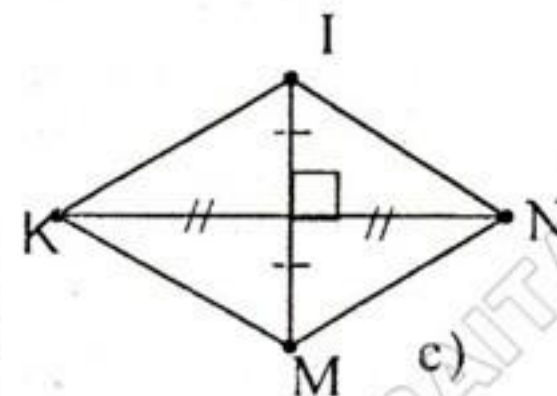
d)

Hình.102



(A và B là tâm các đường tròn)

e)



c)



### Giải

Các tứ giác sau là hình thoi

Hình a): Có bốn cạnh bằng nhau

Hình b): Hình bình hành có một là đường phân giác của một góc

Hình c): Có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường

Hình e):  $AC = AD = AB = BC = BD \Rightarrow AC = CB = BD = DA$

Hình d) không phải là hình thoi vì 4 cạnh không bằng nhau

**Bài 74.** Hai đường chéo của một hình thoi bằng 8cm và 10cm. Cạnh của hình thoi bằng giá trị nào trong các giá trị sau:

- (A) 6cm      (B)  $\sqrt{41}$  cm      (C)  $\sqrt{164}$  cm      (D) 9cm ?

### Giải

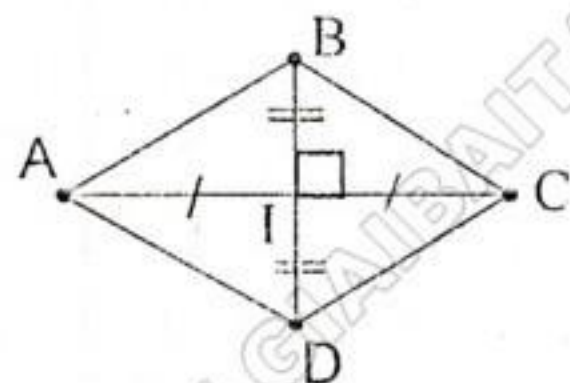
Xét hình thoi ABCD có đường chéo  $AC = 10$  cm và  $BD = 8$  cm. Gọi I là giao của AC và BD

Khi đó:  $AI = IC = \frac{AC}{2} = 5$  (cm)

$BI = ID = \frac{BD}{2} = 4$  và  $AI \perp BI \Rightarrow \triangle AIB$  vuông tại I. Áp dụng định lý

Pitago:  $AB^2 = AI^2 + BI^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow AB = \sqrt{41}$  (cm)

Chọn câu (B)



**Bài 75.** Chứng minh rằng các trung điểm của bốn cạnh của một hình chữ nhật là các đỉnh của một hình thoi.

### Giải

Xét hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA.

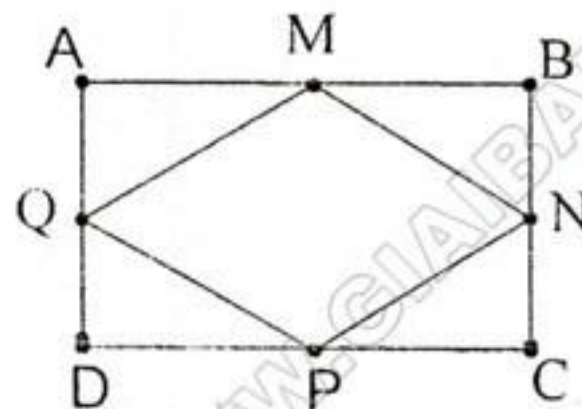
Ta có:  $QA = QD$  và  $AM = DP = \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2}$

$\Rightarrow \triangle_{\text{v}} AQM = \triangle_{\text{v}} DQP \Rightarrow QM = QP$  (1)

Tương tự:  $\triangle_{\text{v}} BNM = \triangle_{\text{v}} CNP \Rightarrow NM = NP$  (2)

$\triangle_{\text{v}} AQM = \triangle_{\text{v}} BNM \Rightarrow QM = NM$  (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có:  $PQ = QM = MN = NP$  Suy ra tứ giác MNPQ là hình thoi.

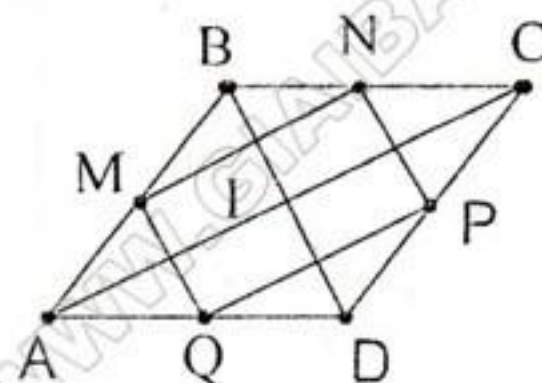


**Bài 76.** Chứng minh các trung điểm của bốn cạnh của một hình bình hành là các đỉnh của hình một hình chữ nhật.

### Giải

Xét hình bình hành ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA.

Ta có:  $AC \perp BD$  tại I





MN, PQ lần lượt là đường trung bình  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ADC$

$\Rightarrow MN \parallel AC$ ,  $PQ \parallel AC$  và  $MN = PQ = \frac{1}{2}AC \Rightarrow$  tứ giác MNPQ là hình

biên hành. Mặt khác:  $MQ \parallel BD \Rightarrow MQ \perp MN \Rightarrow \widehat{QMN} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  tứ giác MNPQ là hình chữ nhật

**Bài 77.** Chứng minh rằng:

a) Giao điểm hai đường chéo của hình thoi là tâm đối xứng của hình thoi.

b) Hai đường chéo của hình thoi là hai trục đối xứng của hình thoi.

**Giải**

a) Hình thoi là hình bình hành nên giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng của hình thoi đó.

b) Xét hình thoi ABCD. Gọi I là giao điểm hai đường chéo AC và BD  $\Rightarrow BD \perp AC$  tại trung điểm I của mỗi đường.

$\triangle ABC$  cân tại B  $\Rightarrow BI$  là trục đối xứng  $\triangle ABC$

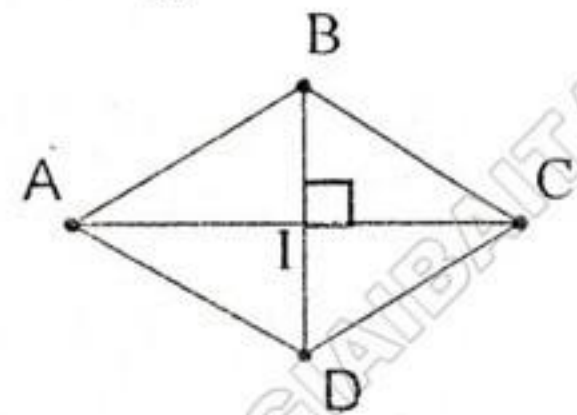
$\triangle ADC$  cân tại D  $\Rightarrow DI$  là trục đối xứng  $\triangle ADC$

$\Rightarrow BD$  là trục đối xứng của hình thoi ABCD

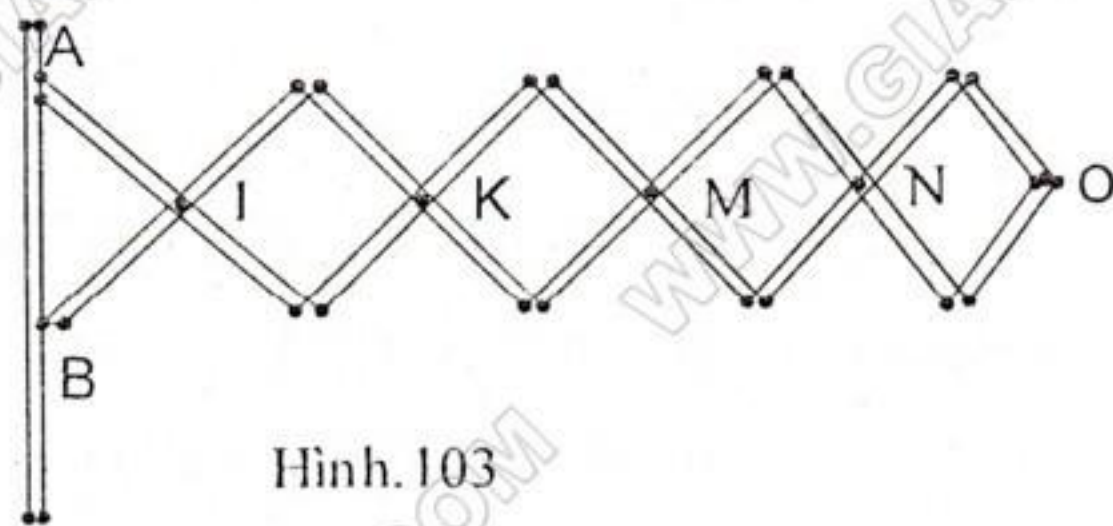
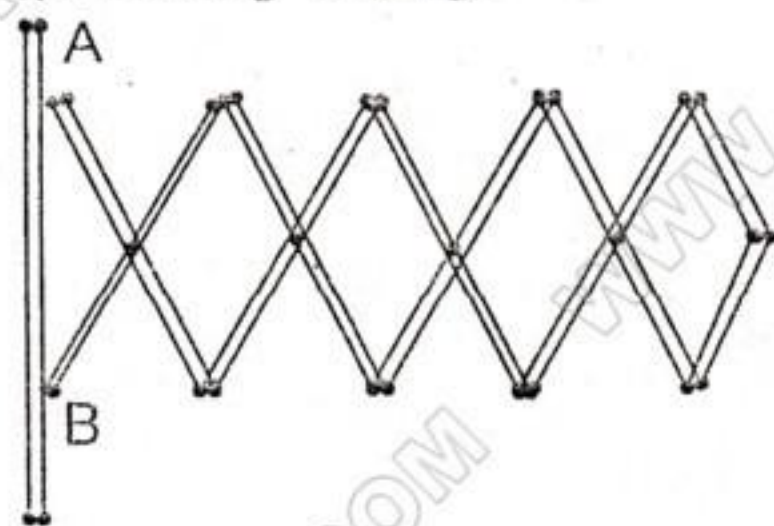
Tương tự:  $\triangle ABD$  cân tại A  $\Rightarrow AI$  là trục đối xứng  $\triangle ABD$

$\triangle CBD$  cân tại C  $\Rightarrow CI$  là trục đối xứng  $\triangle CBD$

$\Rightarrow AC$  là trục đối xứng của hình thoi ABCD



**Bài 78.** Đố. Hình 103 biểu diễn một phần của cửa xếp, gồm những thanh kim loại dài bằng nhau và được liên kết với nhau bởi các chốt tại hai đầu và tại trung điểm. Vì sao tại mỗi vị trí của cửa xếp, các tứ giác trên hình vẽ đều là hình thoi, các điểm chốt I, K, M, N, O nằm trên một đường thẳng?



Hình. 103

**Giải**

Xét tứ giác ADCB có hai đường chéo  $AC = BD$  và cắt nhau tại trung điểm I nên tứ giác ADCB là hình chữ nhật  $\Rightarrow CD \parallel AB$

Tứ giác IDKC có 4 cạnh bằng nhau nên IDKC là hình thoi

$\Rightarrow IK \perp CD \Rightarrow IK \perp AB$

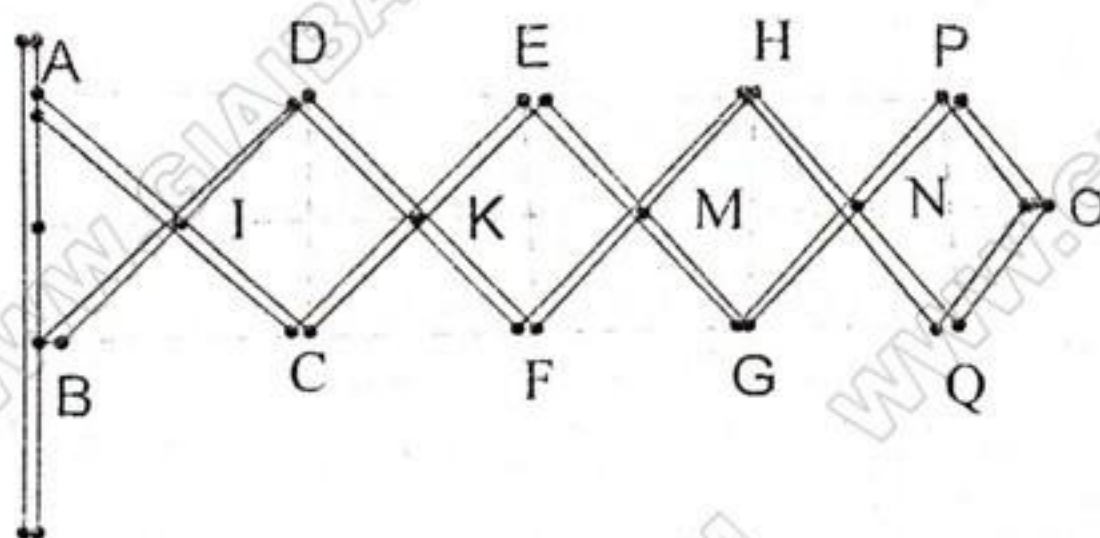
Tương tự, tứ giác DEFC là hình chữ nhật  $\Rightarrow CD \parallel EF$

Tứ giác KEMF là hình thoi nên

$KM \perp FE \Rightarrow KM \perp AB$



⇒ ba điểm I, K, M thẳng hàng



Tương tự, ta chứng minh được các điểm chốt I, K, M, N, O nằm trên một đường thẳng.

## §12 . HÌNH VUÔNG

### A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

**1. Định nghĩa.** Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình vuông} \Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$$

- Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau
- Hình vuông là hình thoi có bốn góc vuông.
- Hình vuông vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi.

### 2. Tính chất

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

### 3. Dấu hiệu nhận biết

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông
- Hình chữ nhật hai đường chéo vuông góc là hình vuông
- Hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc là hình vuông
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông
- hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

### B. BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 79.** a) Một hình vuông có cạnh bằng 3cm. Đường chéo của hình vuông đó bằng 6cm,  $\sqrt{18}$  cm, 5cm hay 4cm?

b) Đường chéo của một hình vuông bằng 2dm. Cạnh của hình vuông đó bằng: 1dm,  $\frac{3}{2}$  dm,  $\sqrt{2}$  dm hay  $\frac{4}{3}$  dm?



**Giải**

Hình vuông có cạnh bằng  $a$ , đường chéo bằng  $d$  thì

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

a) Khi  $a = 3$  (cm) thì  $d = 3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$  (cm)

b) Khi  $d = 2$  (dm) thì  $d = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$  (dm)

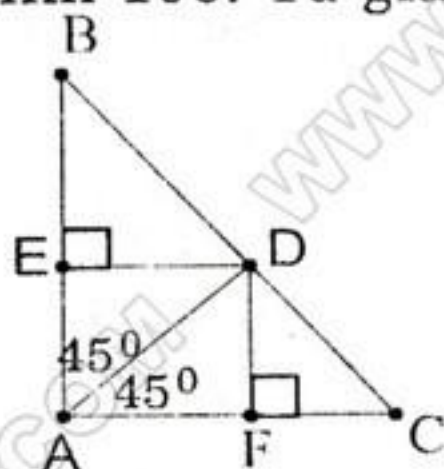
**Bài 80.** Hãy chỉ rõ tâm đối xứng của hình vuông, các trục đối xứng của hình vuông.

**Giải**

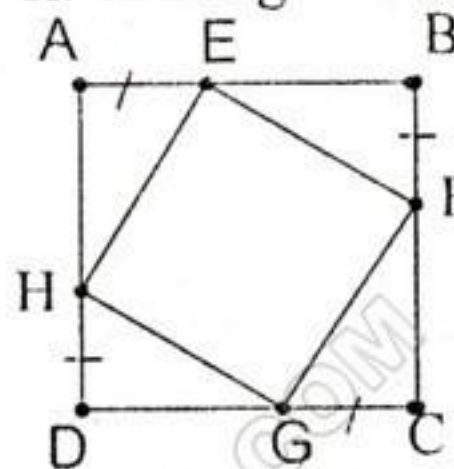
\* Hình vuông là hình bình hành nên giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng của hình thoi đó.

\* Hình vuông là hình thoi, hình chữ nhật nên hai đường chéo, hai đường thẳng đi qua trung điểm các cặp cạnh đối là trục đối xứng của hình vuông

**Bài 81.** Cho hình 106. Tứ giác AEDF là hình gì? Vì sao?



Hình.106



Hình.107

**Giải**

Xét tứ giác EDFA có  $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ \Rightarrow$  tứ giác EDFA là hình chữ nhật

Mặt khác:  $\widehat{EAD} = \widehat{FAD} = 45^\circ \Rightarrow AD$  là phân giác góc  $\widehat{EAF}$

Suy ra tứ giác AEDF là hình vuông

**Bài 82.** Cho hình 107, trong đó ABCD là hình vuông. Chứng minh rằng tứ giác EFGH là hình vuông.

**Giải**

Ta có: ABCD là hình vuông  $\Rightarrow AB = BC = CD = AD$

$$AE = BF = CG = DH \Rightarrow EB = FC = GD = HA$$

$$\Rightarrow \Delta_{\text{v}} AEH = \Delta_{\text{v}} BFE = \Delta_{\text{v}} CGF = \Delta_{\text{v}} DHG \text{ (cặp cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow EH = FE = GF = HG \Rightarrow \text{tứ giác EFGH là hình thoi (1)}$$

$$\text{Mặt khác: } \Delta_{\text{v}} AEH = \Delta_{\text{v}} BFE \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{BFE}$$

$$\widehat{AEH} + \widehat{BEF} = \widehat{BFE} + \widehat{BEF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HEF} = 180^\circ - (\widehat{AEH} + \widehat{BEF})$$

$$\widehat{HEF} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác EFGH là hình vuông



## Luyện tập

**Bài 83.** Các câu sau đúng hay sai?

- Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình thoi.
- Hình thoi là tứ giác có tất cả các cạnh bằng nhau.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.

### Hướng dẫn:

Dựa vào các dấu hiệu nhận biết, ta có kết luận:

Câu a) sai (thiếu tại trung điểm của mỗi đường)

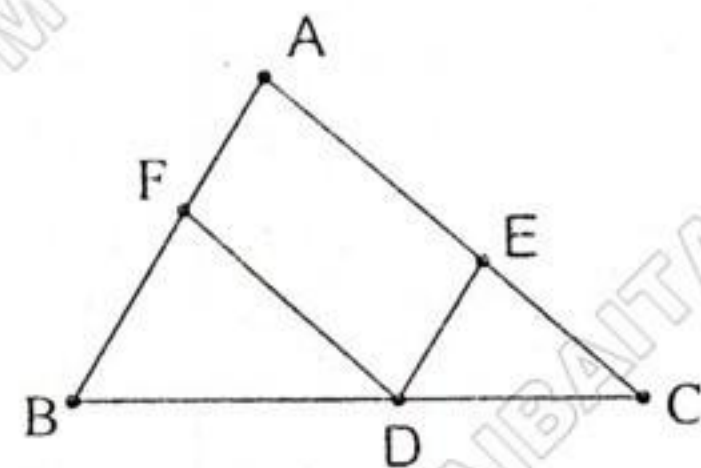
Câu b) đúng      Câu c) đúng      Câu d) sai      Câu e) đúng

**Bài 84.** Cho tam giác ABC, D là điểm nằm giữa B và C. Qua D kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AC và AB theo thứ tự ở E và F.

- Tứ giác AEDF là hình gì? Vì sao?
- Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác AEDF là hình thoi?
- Nếu tam giác ABC vuông tại A thì tứ giác AEDF là hình gì? Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác AEDF là hình vuông?

### Giải

- Ta có:  $DE \parallel AB$  và  $DF \parallel AC \Rightarrow$  tứ giác AEDF là hình bình hành
- Hình bình hành AEDF là hình thoi khi AD là phân giác của góc  $\widehat{BAC}$ . Suy ra D là giao điểm của phân giác góc  $\widehat{BAC}$  với cạnh BC



- Khi tam giác ABC vuông tại A thì tứ giác AEDF là hình chữ nhật

$\Rightarrow BD \perp AC$  tại trung điểm I của mỗi đường.

$\Delta ABC$  cân tại B  $\Rightarrow BI$  là trục đối xứng  $\Delta ABC$   $\Delta ADC$  cân tại D  $\Rightarrow DI$  là trục đối xứng  $\Delta ADC$  AEDF là hình vuông khi AD là phân giác của góc  $\widehat{BAC}$ . Suy ra D là giao điểm của phân giác góc  $\widehat{BAC}$  với cạnh BC

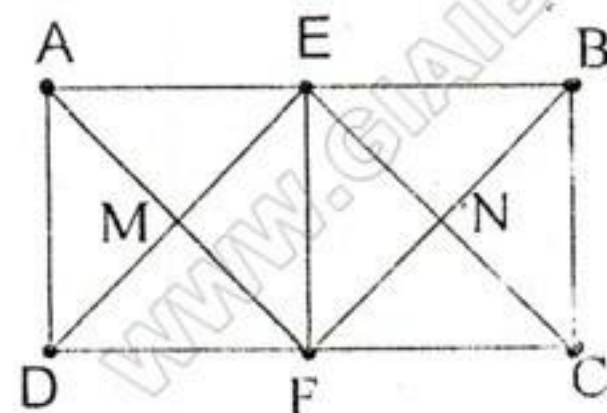
**Bài 85.** Cho hình chữ nhật ABCD có  $AB = 2AD$ . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

- Tứ giác ADFE là hình gì? Vì sao?
- Tứ giác EMFN là hình gì? Vì sao?

### Giải

- Ta có:  $AE \parallel DF$  (do  $AB \parallel DC$ )

$AE = EB, DF = FC$  và  $AB = DC \Rightarrow AE = DF$





$\Rightarrow$  tứ giác ADFE là hình bình hành (1)

Ta có:  $AD = AE$  và  $\widehat{EAD} = 90^\circ$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow$  tứ giác ADFE là hình vuông.

b) Ta có:  $BE \parallel DF$  và  $EB = BF \Rightarrow$  tứ giác EBFD là hình bình hành

$\Rightarrow DE \parallel FB$  (3)

Tương tự:  $AE \parallel FC$  và  $AE = FC \Rightarrow$  tứ giác AECF là hình bình hành

$\Rightarrow AF \parallel EC$  (4)

Từ (3) và (4)  $\Rightarrow$  tứ giác EMFN là hình bình hành

Mặt khác: tứ giác ADFE là hình vuông  $\Rightarrow ME = MF$  và  $\widehat{EMF} = 90^\circ$

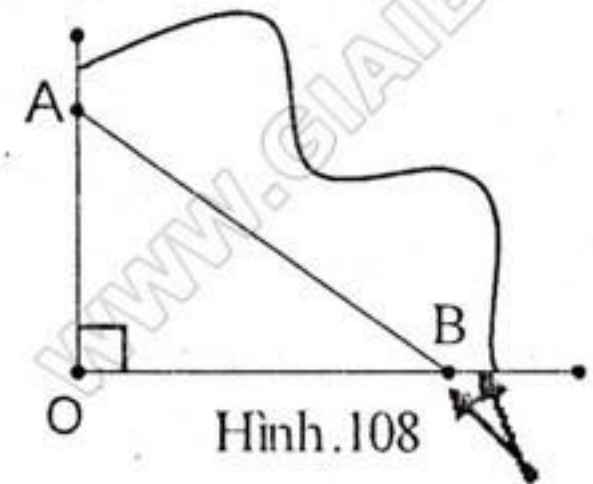
$\Rightarrow$  tứ giác EMFN là hình vuông.

**Bài 86.** Đố. Lấy một tờ giấy gấp làm tư rồi cắt chéo theo nhất cắt AB (h.108). Sau khi mở tờ giấy ra, ta được một tứ giác. Tứ giác nhận được là hình gì? Vì sao? Nếu ta có  $OA = OB$  thì tứ giác được là hình gì?

#### Hướng dẫn

\* Khi cắt một tờ giấy gấp làm tư theo nhất cắt AB. Khi mở tờ giấy ra, ta được một tứ giác có 4 cạnh bằng nhau và hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác đó là hình thoi.

\* Nếu  $OA = OB$  thì hình thoi có hai đường chéo bằng nhau nên tứ giác đó là hình vuông.



Hình.108

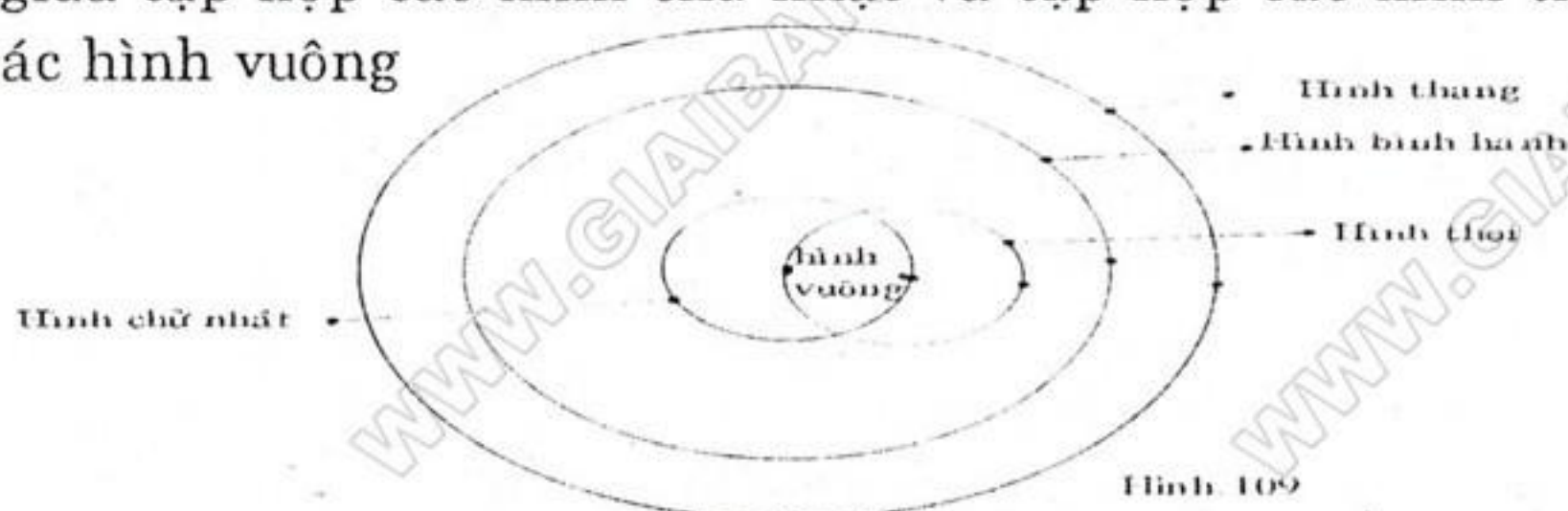
#### ÔN TẬP CHƯƠNG

**Bài 87.** Sơ đồ ở hình 109 biểu thị quan hệ giữa các tập hợp hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông. Dựa vào sơ đồ đó, hãy điền vào chỗ trống:

- Tập hợp các hình chữ nhật là tập hợp con của các hình...
- Tập hợp các hình thoi là tập hợp con của các hình...
- Giao giữa tập hợp các hình chữ nhật và tập hợp các hình thoi là tập hợp các hình...

#### Giải

- Tập hợp các hình chữ nhật là tập hợp con của các hình bình hành, hình thang
- Tập hợp các hình thoi là tập hợp con của các hình bình hành, hình thang
- Giao giữa tập hợp các hình chữ nhật và tập hợp các hình thoi là tập hợp các hình vuông



Hình 109



**Bài 88.** Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD có điều kiện gì thì EFGH là:

a) Hình chữ nhật?

b) hình thoi?

c) Hình vuông?

**Giải**

Ta có: HE, GF lần lượt là đường trung bình của  $\triangle ADB$  và  $\triangle CDB$

$\Rightarrow HE \parallel BD, GF \parallel BD$  và

$$HE = GF = \frac{BD}{2}$$

Tương tự: HG, EF lần lượt là đường trung bình của  $\triangle DAC$  và  $\triangle BAC$

$\Rightarrow HG \parallel AC, EF \parallel AC$  và

$$HG = EF = \frac{AC}{2} \Rightarrow \text{Tứ giác EFGH là hình bình hành}$$

a) Để hình bình hành EFGH là hình chữ nhật thì  $EH \perp EF \Rightarrow BD \perp AC$

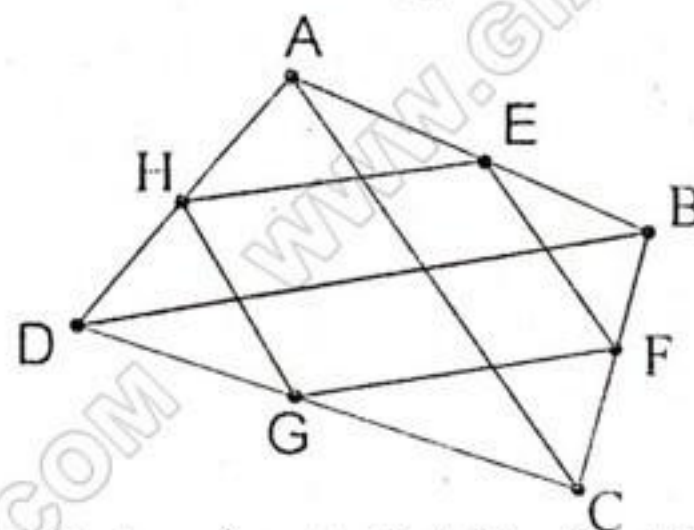
Điều kiện phải tìm: Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau

b) Để hình bình hành EFGH là hình thoi thì  $EH = EF \Rightarrow BD = AC$

Điều kiện phải tìm: Hai đường chéo AC và BD bằng nhau

c) Để hình bình hành EFGH là hình vuông thì EFGH vừa là hình chữ nhật, vừa hình thoi. Suy ra:  $BD \perp AC$  và  $BD = AC$

Điều kiện phải tìm: Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và bằng nhau.



**Bài 89.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AB, E là điểm đối xứng với M qua D.

a) Chứng minh rằng điểm E đối xứng với M qua AB.

b) Các tứ giác AEMC, AEBM là hình gì? Vì sao?

c) Cho  $BC = 4\text{cm}$ , tính chu vi tứ giác AEBM.

d) Tam giác vuông ABC có điều kiện gì thì AEBM là hình vuông?

**Giải**

a) Ta có:  $MB = MC$  (giả thiết)

$DA = DB$  (giả thiết)

$\Rightarrow DM$  là đường trung bình  $\triangle ABC$

$\Rightarrow DM \parallel AC$

Mặt khác:  $\triangle ABC$  vuông tại A

$\Rightarrow AC \perp AB \Rightarrow DM \perp AB \Rightarrow DE \perp AB$  (\*)

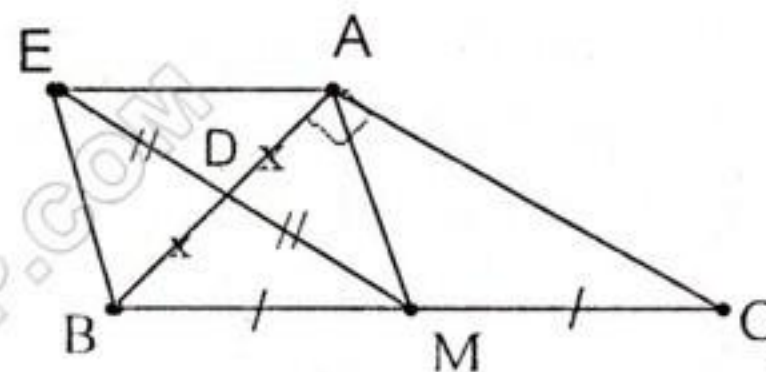
E là điểm đối xứng với M qua D  $\Rightarrow DM = DE$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) ta suy ra: điểm E đối xứng với M qua AB

b) Ta có:  $AB \perp EM$  và  $DE = DM, DA = DB$

$\Rightarrow$  Tứ giác AEBM là hình thoi

$\Rightarrow AE \parallel BM$  mà  $BM = MC \Rightarrow AE \parallel MC$  và  $AE = MC$





$\Rightarrow$  tứ giác AEMC là hình bình hành

c) Ta có  $BC = 4 \text{ (cm)} \Rightarrow BM = \frac{BC}{2} = 2 \text{ (cm)}$

Chu vi hình thoi AEBM là  $P = 4BM = 8 \text{ (cm)}$

d) Hình thoi AEBM là hình vuông khi  $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC$

Mặt khác: AM là trung tuyến của tam giác vuông ABC

Suy ra:  $\triangle ABC$  vuông cân tại A

Điều kiện:  $\triangle ABC$  vuông cân tại A.

## Chương II: ĐA GIÁC – DIỆN TÍCH CỦA ĐA GIÁC

### § 1. ĐA GIÁC – ĐA GIÁC ĐỀU

#### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của đa giác đó. Từ nay, khi nói đến đa giác mà không chú thích gì thêm ta hiểu đó là đa giác lồi.

Đa giác có  $n$  đỉnh ( $n \geq 3$ ) được gọi là hình  $n$ -giác hay hình  $n$ -cạnh.

Với  $n = 3$  gọi là tam giác;  $n = 4$  gọi là tứ giác;

$n = 5$  gọi là ngũ giác;  $n = 6$  gọi là lục giác...

2. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

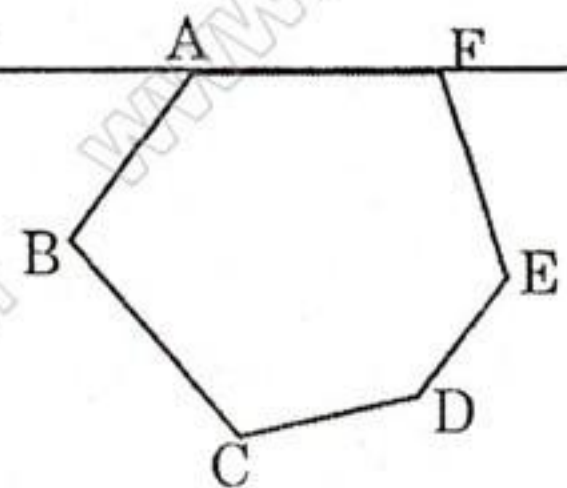
#### B. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

**Bài 1:** Hãy vẽ phác một lục giác lồi. Hãy nêu cách nhận biết một đa giác lồi.

**Hướng dẫn:**

\* Ta có thể vẽ hình như bên.

\* Để nhận biết một đa giác lồi ta vẽ các đường thẳng chứa các cạnh của đa giác nếu đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của đa giác đó thì đa giác đó là đa giác lồi.



**Bài 2.** Cho ví dụ về đa giác không đều trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tất cả các cạnh bằng nhau.

b) Có tất cả các góc bằng nhau.

**Hướng dẫn:**

a) Hình thoi không có góc vuông là tứ giác có tất cả các cạnh bằng nhau nhưng các góc không bằng nhau nên nó không phải là tứ giác đều.



- b) Hình chữ nhật mà các kích thước không bằng nhau là tứ giác có các góc bằng nhau nhưng các cạnh không bằng nhau nên nó không phải là tứ giác đều.

**Bài 3:** Cho hình thoi ABCD có  $\hat{A} = 60^\circ$ .

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA.

Chứng minh rằng đa giác EBFGDH là lục giác đều.

*Giải*

Vì ABCD là hình thoi,  $\hat{A} = 60^\circ$

nên  $\hat{B} = 120^\circ$  và  $\hat{D} = 120^\circ$ .

Ta có: +  $AB = AD$  và  $AE = EB$ ,  $AH = HD \Rightarrow AE = AH \Rightarrow \triangle AEH$  cân tại A.

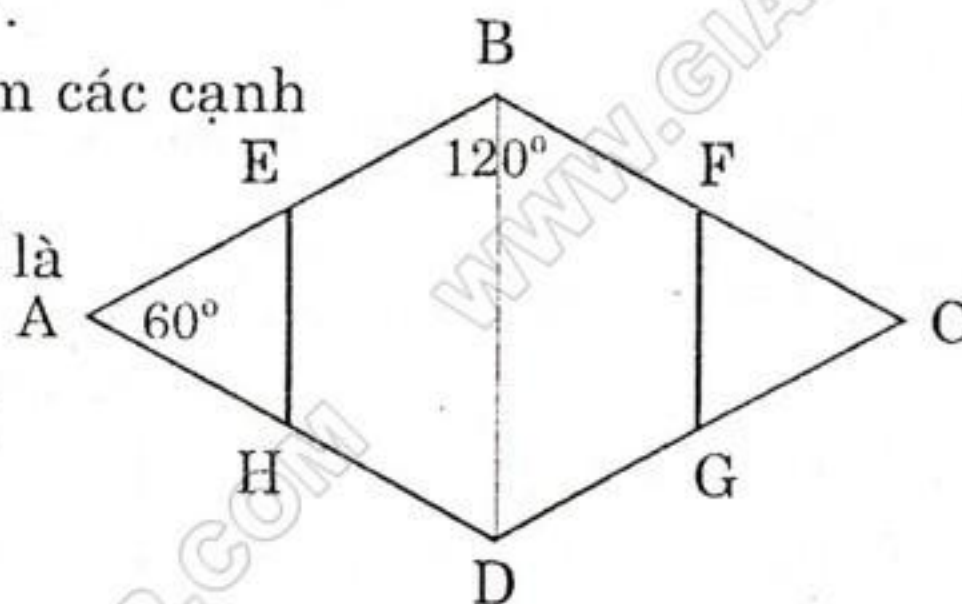
Mà  $\hat{A} = 60^\circ$  nên  $\triangle AEH$  đều  $\Rightarrow \widehat{HEB} = \widehat{EHD} = 120^\circ$  (góc ngoài của  $\triangle$  đều AEH) và  $HE = AE = HD$ .

+ Tương tự:  $\triangle FCG$  đều  $\Rightarrow \widehat{BFG} = \widehat{FGD} = 120^\circ$  và  $FG = FC = BF$ .

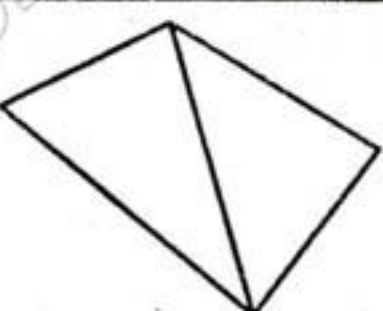
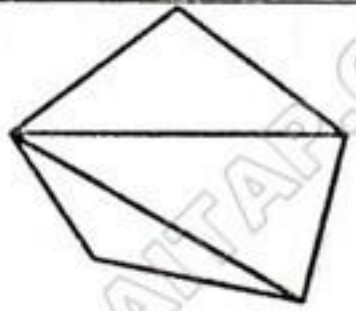
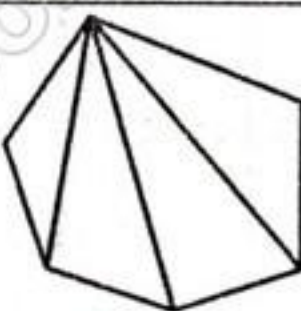
Vậy: Lục giác EBFGDH có:  $EB = BF = FG = DG = HD = HE$

Và  $\widehat{HEB} = \hat{B} = \widehat{BFG} = \widehat{FGD} = \hat{D} = \widehat{DHE}$  (cùng bằng  $120^\circ$ )

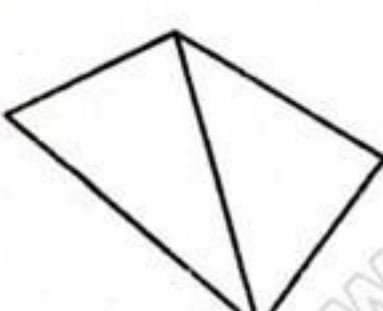
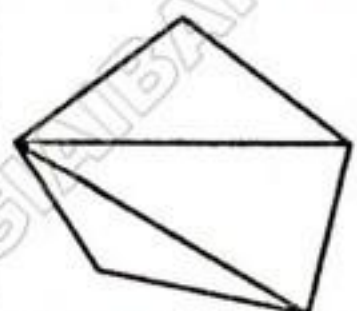
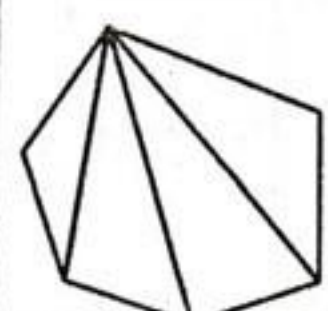
Suy ra: EBFGDH là một lục giác đều.



**Bài 4:** Điền vào ô trống trong bảng sau:

				Đa giác n cạnh
Số cạnh	4			
Số đường chéo xuất phát từ một đỉnh		2		
Số tam giác được tạo thành			4	
Tổng số đo các góc của tam giác			$4.180^\circ = 720^\circ$	

Hướng dẫn:

				Đa giác n - cạnh
Số cạnh	4	5	6	n
Số đường chéo	1	2	3	n - 3



xuất phát từ một đỉnh				
Số tam giác được tạo thành	2	3	4	$n - 2$
Tổng số đo các góc của tam giác	$2.180^\circ = 360^\circ$	$3.180^\circ = 540^\circ$	$4.180^\circ = 720^\circ$	$(n - 2).180^\circ$

**Bài 5:** Tính số đo mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều,  $n$ -giác đều.

### Hướng dẫn:

\* Theo bài 4: Tổng số đo các góc trong của  $n$ -giác là  $(n - 2).180^\circ$  (bằng tổng số đo các góc của số tam giác được tạo thành bởi các cạnh và các đường chéo xuất phát từ 1 đỉnh). Vậy số đo mỗi góc của  $n$ -giác đều là  $\frac{(n - 2).180^\circ}{n}$ .

Khi đó: + Với ngũ giác đều ( $n = 5$ ), ta có số đo mỗi góc là:

$$\frac{(5 - 2).180^\circ}{5} = 108^\circ.$$

+ Với lục giác đều ( $n = 6$ ), ta có số đo mỗi góc là:  $\frac{(6 - 2).180^\circ}{6} = 120^\circ$ .

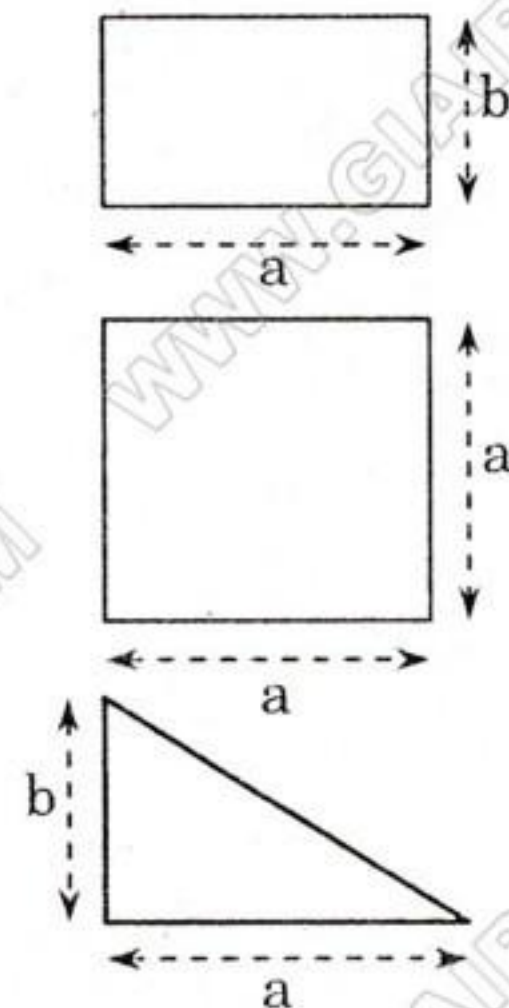
## §2. DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

- Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích đa giác là một số dương.
  - Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
  - Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
  - Hình vuông cạnh có độ dài bằng 1 thì diện tích là 1 đơn vị diện tích.

### 2. Công thức tính diện tích:

- Diện tích hình chữ nhật:  $S = a.b$   
 $a, b$ : các kích thước
- Diện tích hình vuông:  $S = a^2$   
 $a$ : cạnh hình vuông
- Diện tích tam giác vuông:  $S = \frac{1}{2} a.b$





## B. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

**Bài 6:** Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu:

- Chiều dài tăng 2 lần, chiều rộng không đổi?
- Chiều dài và chiều rộng tăng 3 lần?
- Chiều dài tăng 4 lần, chiều rộng giảm 4 lần?

**Hướng dẫn:**

Gọi  $a, b$  lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật. Ta có:  
Diện tích hình chữ nhật là  $S = a.b$ .

- Khi chiều dài tăng 2 lần, chiều rộng không đổi thì diện tích hình chữ nhật mới là  $S_1 = 2a.b = 2S$ . Vậy diện tích tăng gấp đôi.
- Khi chiều dài và chiều rộng tăng 3 lần thì diện tích hình chữ nhật mới là  $S_2 = 3a.3b = 9S$ . Vậy diện tích tăng gấp 9 lần.
- Khi chiều dài tăng 4 lần, chiều rộng giảm 4 lần thì diện tích hình chữ nhật mới là  $S_3 = 4a.\frac{b}{4} = S$ . Vậy diện tích không thay đổi.

**Bài 7:** Một gian phòng có nền hình chữ nhật với kích thước là 4,2m và 5,4m, có một cửa sổ hình chữ nhật kích thước là 1m và 1,6m và một cửa ra vào hình chữ nhật kích thước 1,2m và 2m. Ta coi một gian phòng đạt mức chuẩn về ánh sáng nếu diện tích các cửa bằng 20% diện tích nền nhà. Hỏi gian phòng trên có đạt mức chuẩn về ánh sáng hay không?

**Hướng dẫn:**

\* Diện tích nền nhà là:  $4,2 \cdot 5,4 = 22,68 \text{ (m}^2\text{)}$ .

\* Diện tích các cửa là:  $1 \cdot 1,6 + 1,2 \cdot 2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}$ .

\* Tỷ lệ của diện tích các cửa và diện tích nền nhà là:  $\frac{4.100}{22,68} \% = 17,64\%$ .

Vậy gian phòng trên chưa đạt mức chuẩn về ánh sáng.

**Bài 8:** Bạn đọc tự làm.

**Hướng dẫn:**

Ta cần đo AB và AC.

Diện tích tam giác vuông đó là  $S = \frac{1}{2} AB.AC$ .

## LUYỆN TẬP

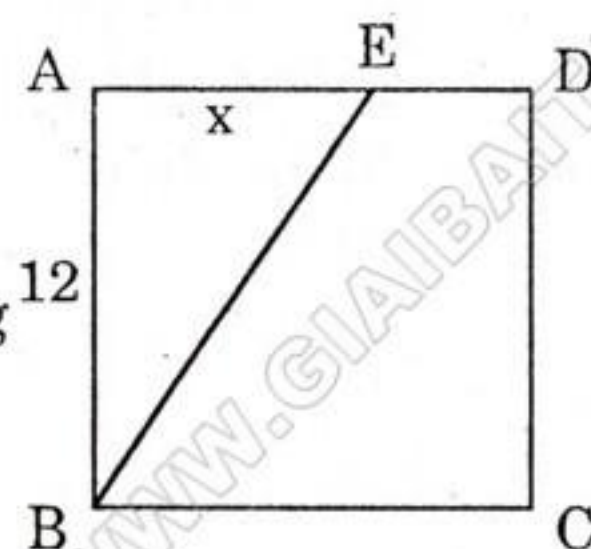
**Bài 9:** ABCD là một hình vuông cạnh 12cm,

AE = x cm (hình bên). Tính x sao cho diện

tích tam giác ABE bằng  $\frac{1}{3}$  diện tích hình vuông

ABCD.

**Hướng dẫn:**





\* Diện tích  $\triangle ABE$ :  $S = \frac{1}{2} AB \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x = 6x \text{ (cm}^2\text{)}.$

\* Diện tích hình vuông ABCD:  $S_1 = AB^2 = 12^2 = 144 \text{ (cm}^2\text{)}$

Ta có:  $S = \frac{1}{3} S_1 \Rightarrow 6x = \frac{144}{3} \Rightarrow 6x = 48 \Rightarrow x = 8.$

Vậy:  $x = 8\text{cm}.$

**Bài 10:** Cho một tam giác vuông. Hãy so sánh tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông với diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền.

**Hướng dẫn:**

Cho tam giác ABC, vuông tại A. Ta lần lượt vẽ các hình vuông ABDE, ACFG và BCHI.

Ta so sánh  $S_{ABDE} + S_{ACFG}$  và  $S_{BCHI}$ .

Ta có:

+ ABED là hình vuông:  $S_{ABED} = AB^2.$

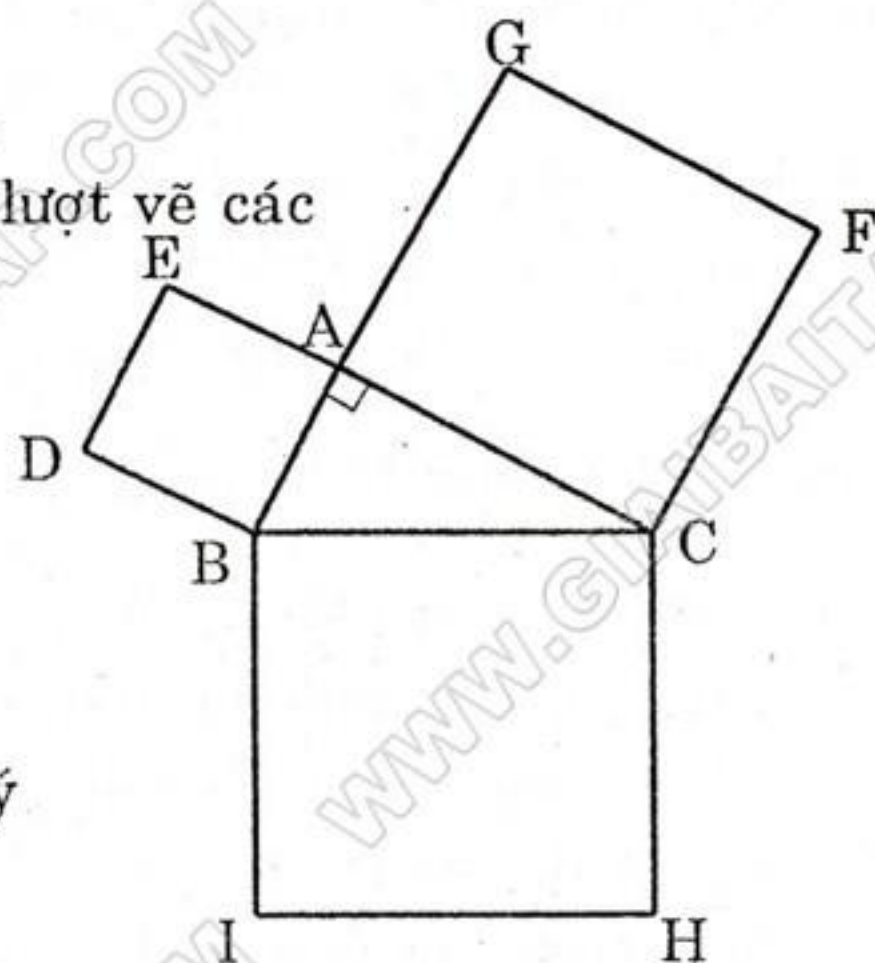
+ ACFG là hình vuông:  $S_{ACFG} = AC^2.$

+ BCHI là hình vuông:  $S_{BCHI} = BC^2.$

Trong tam giác vuông ABC, theo định lý

Pitago:  $BC^2 = BA^2 + AC^2$

Suy ra:  $S_{BCHI} = S_{ABED} + S_{ACFG}.$



**Bài 11:** Cắt hai tam giác vuông bằng nhau từ một tấm bìa. Hãy ghép hai tam giác đó để tạo thành:

a) Một tam giác cân.

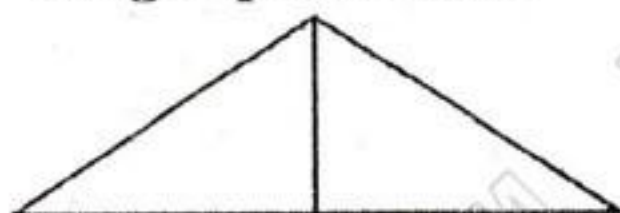
b) Một hình chữ nhật.

c) Một hình bình hành.

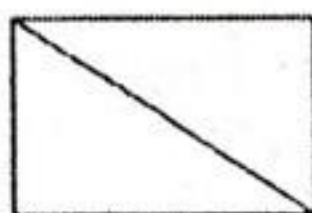
Diện tích của các hình này có bằng nhau không? Vì sao?

**Hướng dẫn:**

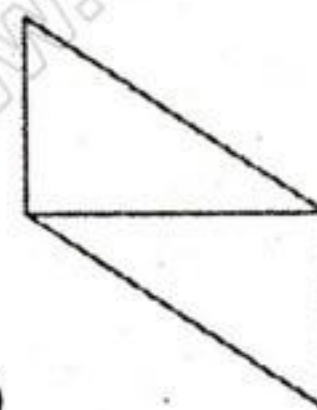
Ta ghép như sau:



b)



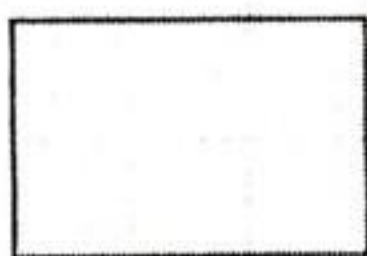
a)



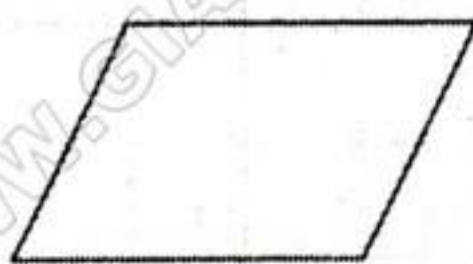
c)

Diện tích của các hình này bằng nhau vì đều bằng tổng của hai tam giác vuông trên.

**Bài 12:** Tính diện tích các hình dưới đây (mỗi ô vuông là một đơn vị diện tích).



a)



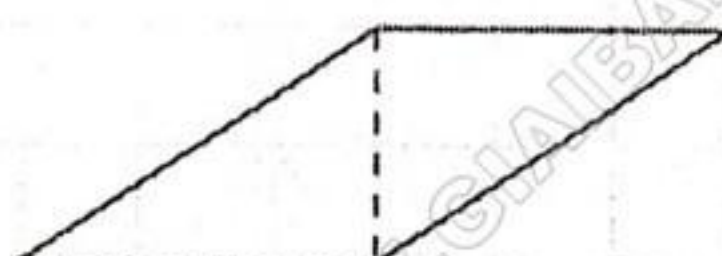
b)



c)



### Hướng dẫn:



\* Hình a: là một hình chữ nhật có diện tích:  $2 \cdot 3 = 6$  (đơn vị diện tích).

\* Hình b: Ta vẽ thêm 2 đoạn thẳng (nét đứt), ta có diện tích hình bình hành này bằng diện tích của 2 hình tam giác vuông và 1 hình vuông.

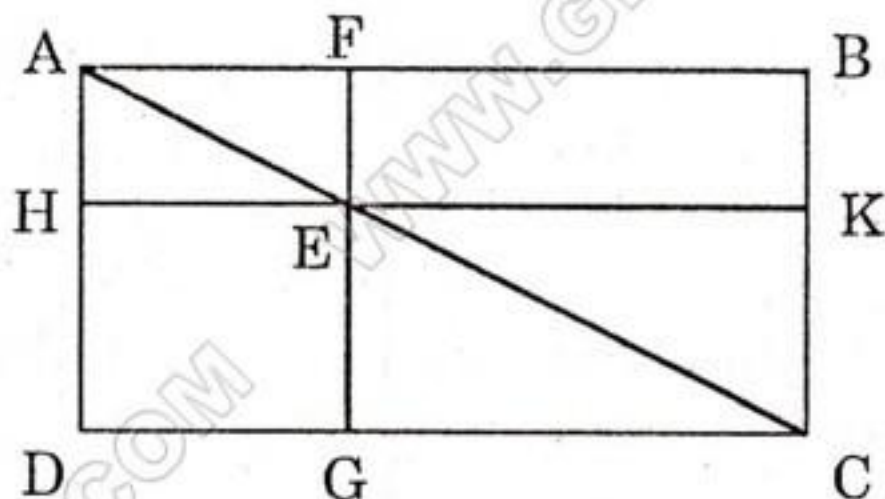
Diện tích hình bình hành (b) bằng:  $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 6$  (đơn vị diện tích).

\* Hình c: Ta vẽ thêm 1 đoạn thẳng (nét đứt), ta có diện tích hình bình hành này bằng diện tích của 2 hình tam giác vuông.

Diện tích hình bình hành (c) bằng:  $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 6$  (đơn vị diện tích).

**Bài 13:** Cho hình bên, trong đó ABCD là hình chữ nhật, E là một điểm bất kì nằm trên đường chéo AC, FG // AD và HK // AB.

Chứng minh rằng hai hình chữ nhật EFBK và EGDH có cùng diện tích.



### Hướng dẫn:

+ Vì ABCD là hình chữ nhật nên:  $S_{ABC} = S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ .

+ FG // AD và HK // AB  $\Rightarrow$  AFEH là hình chữ nhật  $\Rightarrow S_{AFE} = S_{AHE}$ .

+ FG // AD và HK // AB  $\Rightarrow$  EKCG là hình chữ nhật  $\Rightarrow S_{EKC} = S_{EGC}$ .

Suy ra:  $S_{ABC} - S_{AFE} - S_{EKC} = S_{ADC} - S_{AHE} - S_{EGC} \Rightarrow S_{EFBK} = S_{EGDH}$

Vậy hai hình chữ nhật EFBK và EGDH có cùng diện tích.

**Bài 14:** Một đám đất hình chữ nhật dài 700m, rộng 400m. Hãy tính diện tích đám đất đó theo đơn vị  $m^2$ ,  $km^2$ , a, ha.

### Hướng dẫn:

Diện tích của hình chữ nhật là:  $700 \cdot 400 = 280000 (m^2)$ .

Vậy diện tích đám đất bằng:  $280000m^2 = 0,28km^2 = 2800a = 28 ha$ .

**Bài 15:** Đố. Vẽ hình chữ nhật ABCD có AB = 5cm, BC = 3cm.

a) Hãy vẽ một hình chữ nhật có diện tích nhỏ hơn nhưng có chu vi lớn hơn hình chữ nhật ABCD. Vẽ được mấy hình như vậy?

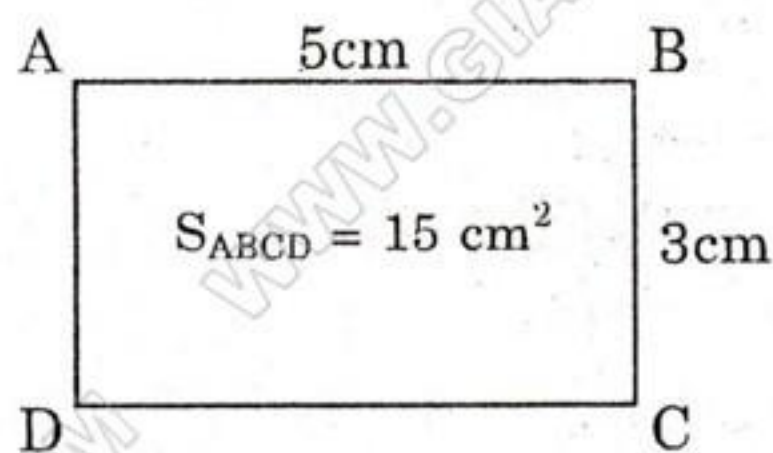
b) Hãy vẽ hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật ABCD. Vẽ được mấy hình vuông như vậy? So sánh diện tích hình chữ nhật với diện tích hình vuông có cùng chu vi vừa vẽ. Tại sao



trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất?

### Hướng dẫn:

- a) Chu vi hình chữ nhật ABCD là: 16 cm
- Hình chữ nhật các kích thước 1cm, 12cm có diện tích:  $S = 12 \text{ cm}^2$  và chu vi 26 cm
  - Hình chữ nhật các kích thước 2cm, 7cm có diện tích:  $S = 14 \text{ cm}^2$  và chu vi 18 cm.
  - Hình chữ nhật các kích thước 1cm, 10cm có diện tích:  $S = 10 \text{ cm}^2$  và chu vi 22 cm.



Như vậy, vẽ được nhiều hình chữ nhật có diện tích bé hơn nhưng có chu vi lớn hơn hình chữ nhật ABCD cho trước.

- b) Cạnh của hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật ABCD là:

$$\frac{(3 + 5) \cdot 2}{4} = 4 \text{ cm}$$

Diện tích hình vuông MNPQ có cạnh PN = 4cm là:

$$S_{MNPQ} = 16 \text{ cm}^2.$$

Vậy:  $S_{MNPQ} > S_{ABCD}$ .

Vẽ được một hình vuông như vậy.

\* Giả sử hình chữ nhật có các kích thước là a và b. Khi đó:

+ Diện tích của hình chữ nhật là:  $ab$ .

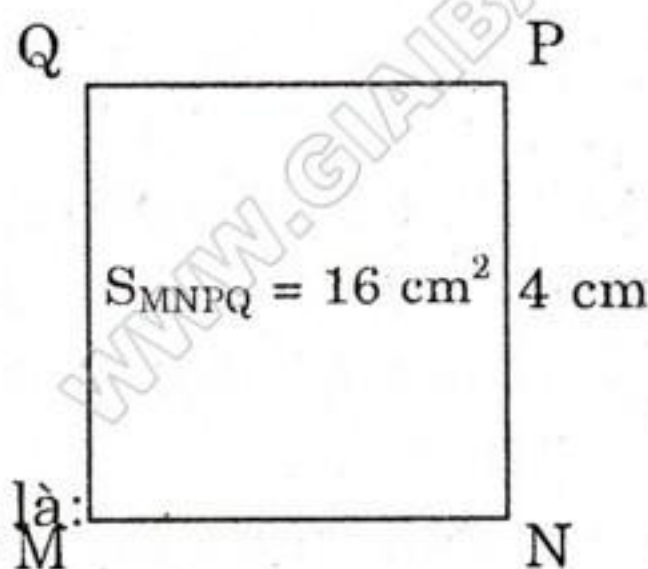
+ Cạnh của hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật là:  $\frac{a + b}{2}$

⇒ Diện tích của hình vuông là  $\left(\frac{a + b}{2}\right)^2$ .

$$\text{Ta có: } \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{(a + b)^2}{4} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(a - b)^2 + 4ab}{4} = \frac{(a - b)^2}{4} + ab \geq ab$$

(vì  $\frac{(a - b)^2}{4} \geq 0$ , với mọi a, b).

Vậy trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất



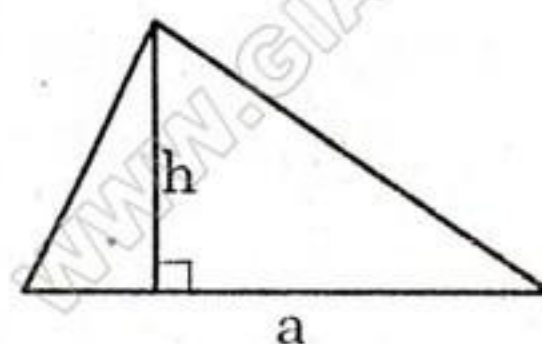


### §3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

#### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

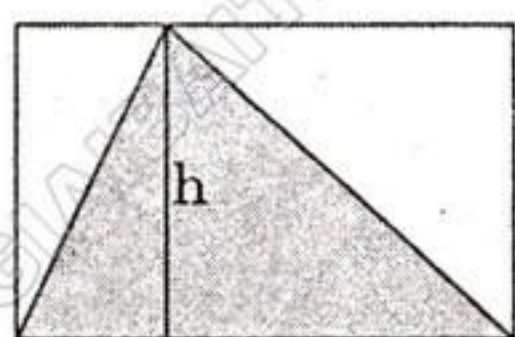
Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó:

$$S = \frac{1}{2} a.h$$

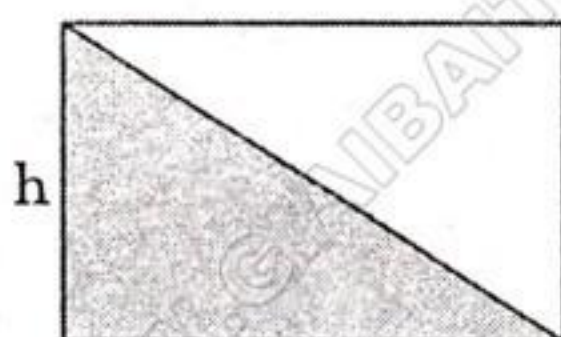


#### B. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

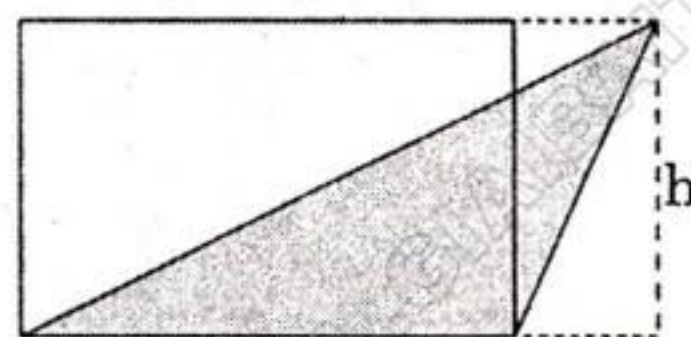
**Bài 16:** Giải thích vì sao diện tích của tam giác được tô đậm trong các hình a, b, c bằng nửa diện tích hình chữ nhật tương ứng:



a)



b)



c)

#### Hướng dẫn:

+ Diện tích các hình chữ nhật trong cả ba hình đều là:  $ah$ .

+ Diện tích các tam giác được tô đậm trong cả ba hình đều là:  $\frac{1}{2} ah$ .

Vậy diện tích của tam giác được tô đậm trong các hình a, b, c bằng nửa diện tích hình chữ nhật tương ứng.

**Bài 17:** Cho tam giác AOB vuông tại O

với đường cao OM (hình bên).

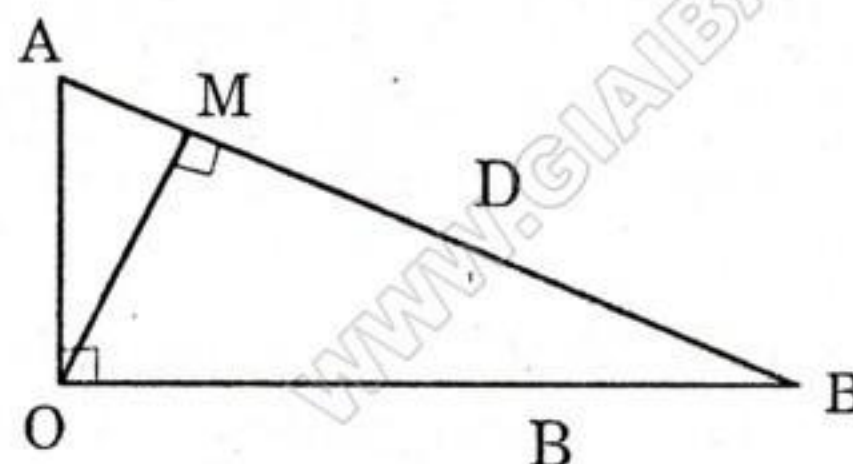
Hãy giải thích vì sao ta có đẳng thức:

$$AB \cdot OM = OA \cdot OB$$

#### Hướng dẫn:

Ta có:  $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB$  và  $S_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB$ .

$$\text{Vậy } \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} OM \cdot AB \Rightarrow OA \cdot OB = OM \cdot AB.$$



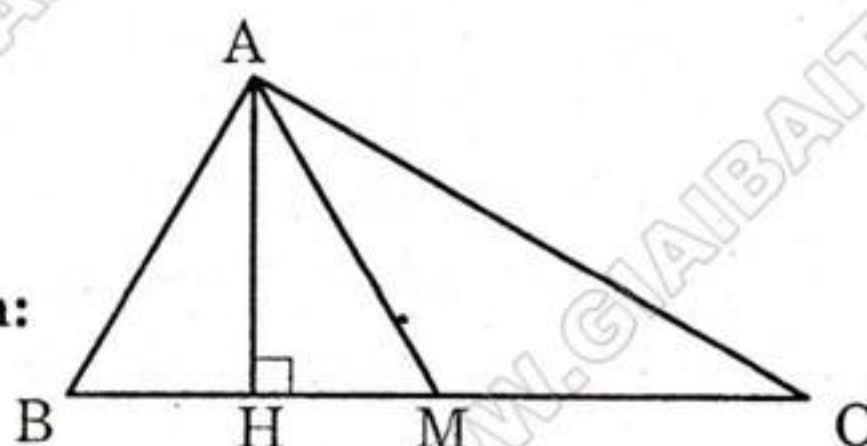
**Bài 18:** Cho tam giác ABC và đường trung tuyến AM (hình bên).

Chứng minh:  $S_{AMB} = S_{AMC}$ .

#### Hướng dẫn:

Kẻ đường cao AH của  $\triangle ABC$ .

+ Ta có:  $S_{AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AH$ ;  $S_{AMC} = \frac{1}{2} MC \cdot AH$ .





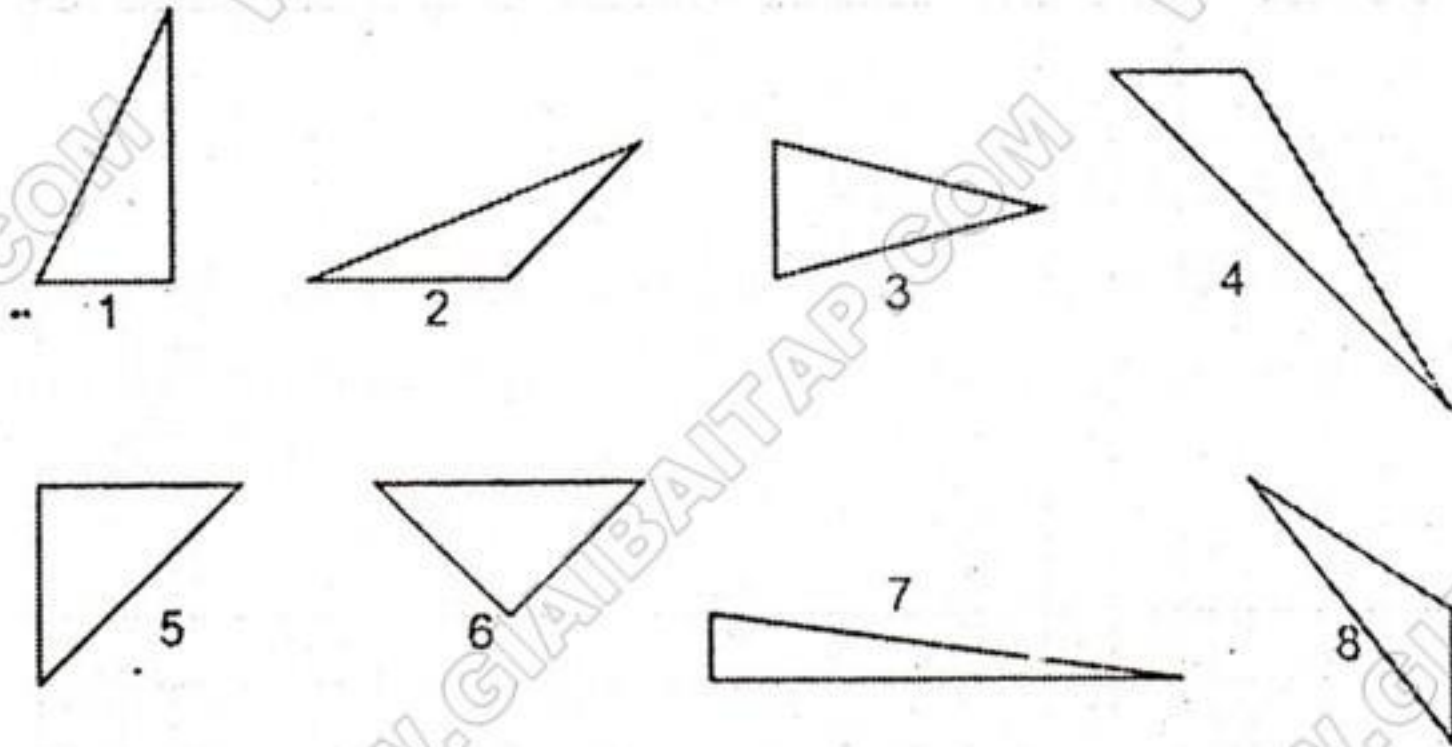
+ Vì AM là trung tuyến nên  $BM = MC$ .

Vậy:  $S_{AMB} = S_{AMC}$ .

### LUYỆN TẬP

**Bài 19:** a) Xem hình dưới. Hãy chỉ ra các tam giác có cùng diện tích (lấy ô vuông làm đơn vị diện tích):

b) Hai tam giác có diện tích bằng nhau thì có bằng nhau hay không?



### Hướng dẫn:

a) Ta có diện tích các tam giác 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lần lượt là 4, 2, 4, 5,  $\frac{9}{2}$ , 4,  $\frac{7}{2}$ , 3 ô vuông.

Vậy các tam giác 1, tam giác 3, tam giác 6 có cùng diện.

b) Hai tam giác có cùng diện tích có thể không bằng nhau. Chẳng hạn hai tam giác 1 và 3 ở câu a).

**Bài 20:** Vẽ hình chữ nhật có một cạnh bằng một cạnh của một tam giác cho trước và có diện tích bằng diện tích của tam giác đó. Từ đó suy ra một cách chứng minh khác về công thức tính diện tích tam giác.

### Hướng dẫn:

Cho  $\triangle ABC$ , đường cao AH.

Gọi I là trung điểm của AH, ta vẽ

hình chữ nhật BCDE có

$CD = IH$  (hình bên).

Khi đó: +  $\triangle AIM = \triangle BEM$  vì

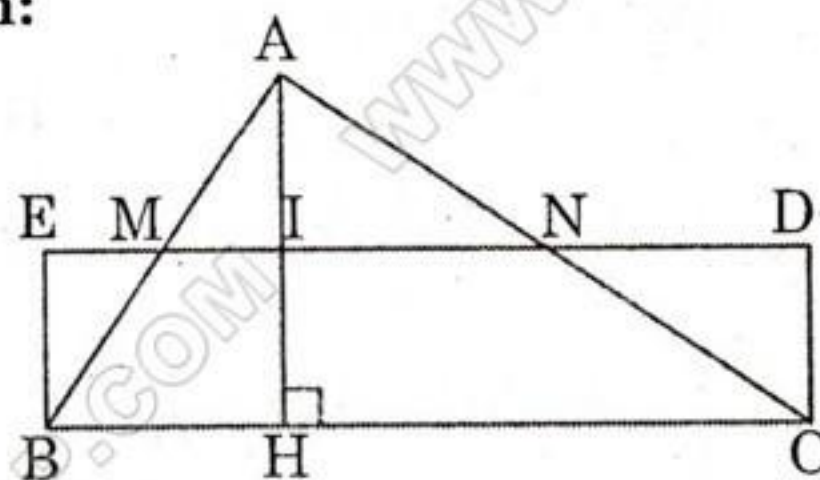
$AI = BE (= \frac{1}{2}AH)$ ,  $\widehat{AMI} = \widehat{BME}$  (đối đỉnh)

(cạnh góc vuông - góc nhọn)  $\Rightarrow S_{AIM} = S_{BEM}$ .

+ Tương tự:  $\triangle AIN = \triangle CDN \Rightarrow S_{AIN} = S_{CDN}$ .

Vì vậy:  $S_{BEM} + S_{BMNC} + S_{CDN} = S_{AIM} + S_{BMNC} + S_{AIN}$  hay  $S_{BCDE} = S_{ABC}$ .

\* Từ kết quả trên, ta có:  $S_{ABC} = S_{BCDE} = CD \cdot BC = IH \cdot BC = \frac{1}{2}AH \cdot BC$ .





**Bài 21:** Tính x sao cho diện tích hình chữ nhật ABCD gấp ba lần diện tích tam giác ADE (hình bên).

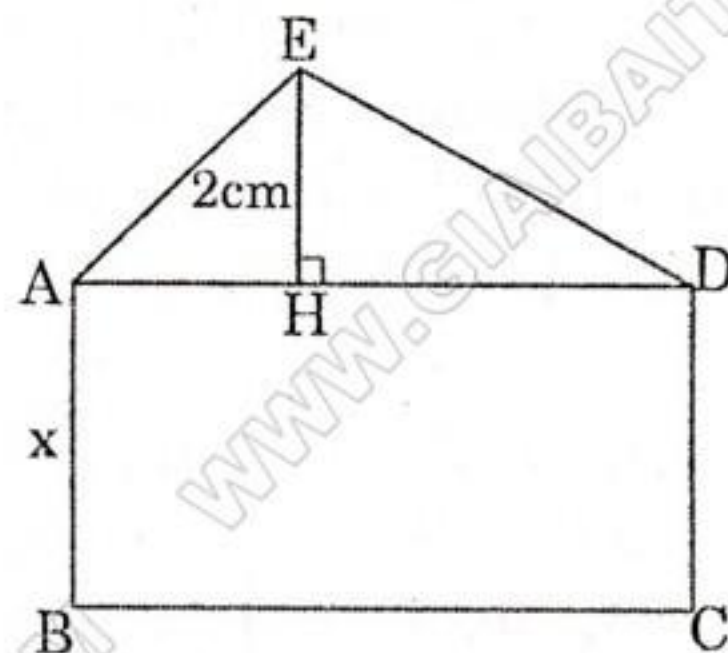
**Hướng dẫn:**

Ta có:  $S_{ABCD} = AB \cdot AD = x \cdot AD$ .

$$+ S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AD.$$

$$\text{Khi đó: } S_{ABCD} = 3S_{ADE} \Rightarrow x \cdot AD = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot AD$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ (cm)}.$$



**Bài 22:** Tam giác PAF được vẽ trên giấy kẻ ô vuông (hình bên). Hãy chỉ ra:

a) Một điểm I sao cho  $S_{PIF} = S_{PAF}$

b) Một điểm O sao cho  $S_{POF} = 2 \cdot S_{PAF}$

c) Một điểm N sao cho  $S_{PNF} = \frac{1}{2} S_{PAF}$

**Hướng dẫn:**

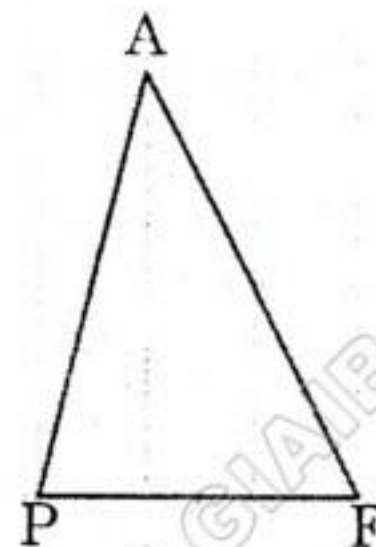
Cần chú ý rằng các tam giác trên đều có chung đỉnh P nên nếu lấy các cạnh đối diện với đỉnh P đều nằm trên đường thẳng AF thì ta có đường cao vẽ từ P của các tam giác này chính là đường cao ứng với cạnh AF của  $\triangle APF$ . Khi đó:

a) Để  $S_{PIF} = S_{PAF}$  thì có thể lấy I nằm trên đường thẳng AF sao cho I khác A và FA = FI hay F là trung điểm của AI.

b) Để  $S_{POF} = 2 \cdot S_{PAF}$  thì có thể lấy O nằm trên đường thẳng AF sao cho OF = 2AF hay A là trung điểm của OF.

c)  $S_{PNF} = \frac{1}{2} S_{PAF}$  thì có thể lấy N nằm trên đường thẳng AF sao cho

$$NF = \frac{1}{2} AF \text{ hay N là trung điểm của AF.}$$



**Bài 23:** Cho tam giác ABC. Hãy chỉ ra một số vị trí của điểm M nằm trong tam giác đó sao cho:  $S_{AMB} + S_{BMC} = S_{MAC}$ .

**Hướng dẫn:**

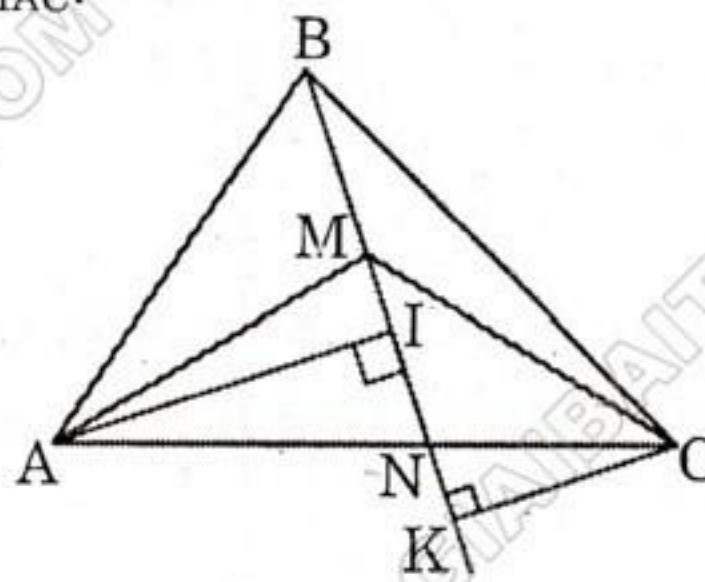
Lấy điểm N bất kì thuộc cạnh AC,

gọi M là trung điểm của BN. Khi đó:

+  $S_{AMB} = S_{AMN}$  vì cùng chung đường cao AI và MB = MN.

+  $S_{BMC} = S_{CMN}$  vì cùng chung đường cao CK và MB = MN.

Vậy:  $S_{AMB} + S_{BMC} = S_{AMN} + S_{CMN} = S_{MAC}$ .





\* Từ kết quả trên ta có thể chọn được vô số điểm M thỏa mãn điều kiện bài toán. Chẳng hạn: M là trung điểm của trung tuyến vẽ từ B, của đường cao vẽ từ B,...

**Bài 24:** Tính diện tích của một tam giác cân có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.

**Hướng dẫn:**

Cho  $\triangle ABC$  cân tại A:  $AB = AC = b$ ,  $BC = a$ .

Ta tính  $S_{ABC}$ .

+ Vẽ đường cao AH của  $\triangle ABC$ , vì  $\triangle ABC$  cân tại A

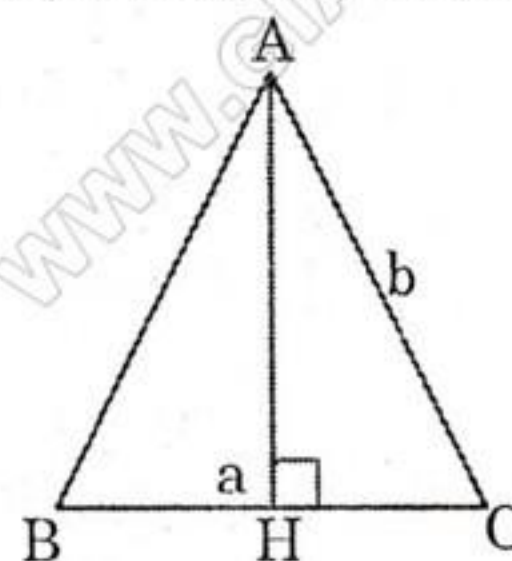
nên H là trung điểm của BC  $\Rightarrow HB = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ .

+ Xét tam giác vuông AHB, ta có:

$$AH^2 = AB^2 - HB^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4b^2 - a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}}$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}} \text{ (đơn vị diện tích).}$$



**Bài 25:** Tính diện tích của một tam giác đều có cạnh bằng a.

**Hướng dẫn:**

Áp dụng kết quả của bài 24 với  $b = a$ , ta có: Diện tích của một tam

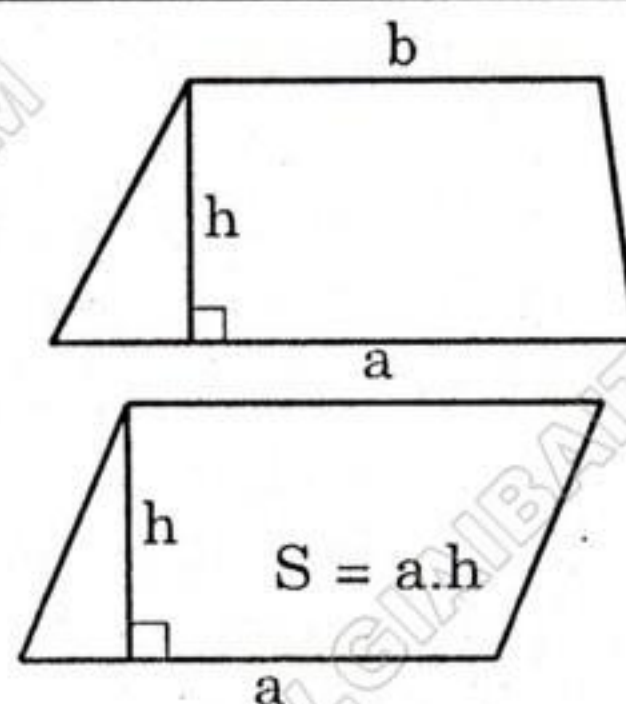
giác đều có cạnh bằng a là:  $\frac{a}{2} \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$  (đơn vị diện tích).

## §4. DIỆN TÍCH HÌNH THANG

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao:

2. Diện tích của hình bình hành bằng tích của một cạnh và chiều cao ứng với cạnh đó:





## B. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

### Bài 26: Tính diện tích mảnh đất hình thang ABED

theo các độ dài đã cho trên hình bên và biết diện tích hình chữ nhật ABCD là  $828\text{m}^2$ .

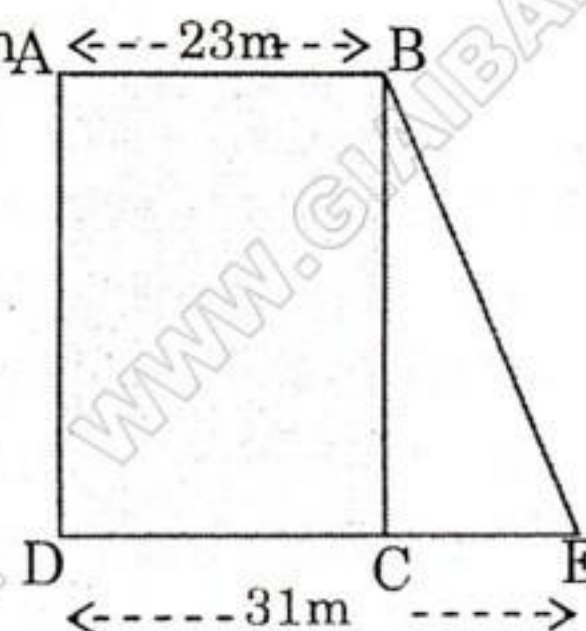
**Hướng dẫn:**

+ Ta có:  $S_{ABCD} = AB \cdot AD$  nên

$$828 = 23 \cdot AD \Rightarrow AD = 828 : 23 = 36 \text{ (m)}.$$

Khi đó:  $S_{ABED} = \frac{1}{2}(AB + DE) \cdot AD =$

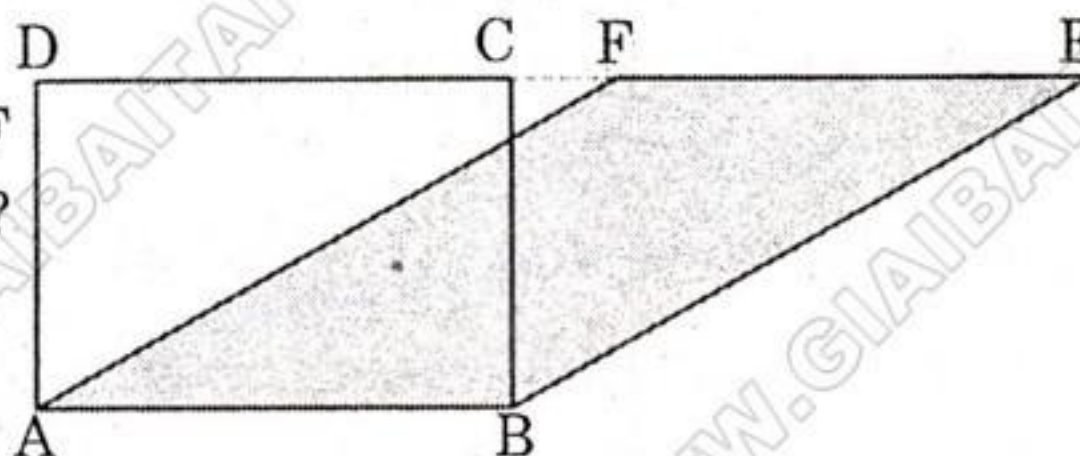
$$= \frac{1}{2}(23 + 31) \cdot 36 = 972 \text{ (m}^2\text{)}.$$



### Bài 27: Vì sao hình chữ nhật

ABCD và hình bình hành ABEF (hình bên) lại có cùng diện tích?

Suy ra cách vẽ một hình chữ nhật có cùng diện tích với một hình bình hành cho trước.



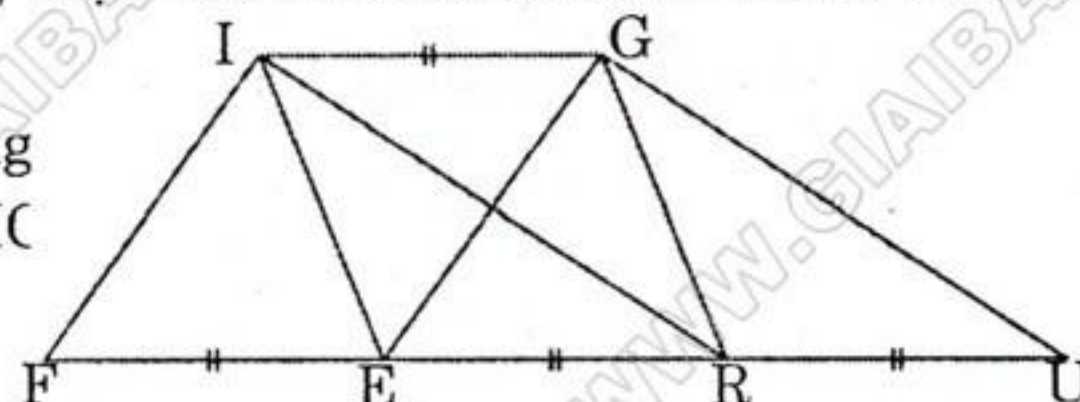
**Hướng dẫn:**

\* Ta có:  $S_{ABCD} = AB \cdot BC = EF \cdot BC = S_{ABEF}$  (vì BC là đường cao ứng với cạnh EF của hình bình hành ABEF).

\* Để vẽ hình chữ nhật có cùng diện tích với hình bình hành ABEF ta vẽ lần lượt vẽ hai đường thẳng vuông góc với AB tại A và B. Hai đường thẳng này cắt đường thẳng EF tại D và C. Khi đó ABCD là hình chữ nhật có diện tích bằng diện tích với hình bình hành ABEF.

### Bài 28: Xem hình bên (IG // FU).

Hãy đọc tên một số hình có cùng diện tích với hình bình hành FIC



**Hướng dẫn:**

+ Các hình bình hành cùng diện tích với FIC: IERG; IRUG (cùng chiều cao và cạnh tương ứng chiều cao bằng nhau).

+ Các tam giác cùng diện tích với FIC: IFR; GEU.

### Bài 29: Khi nối trung điểm của hai đáy hình

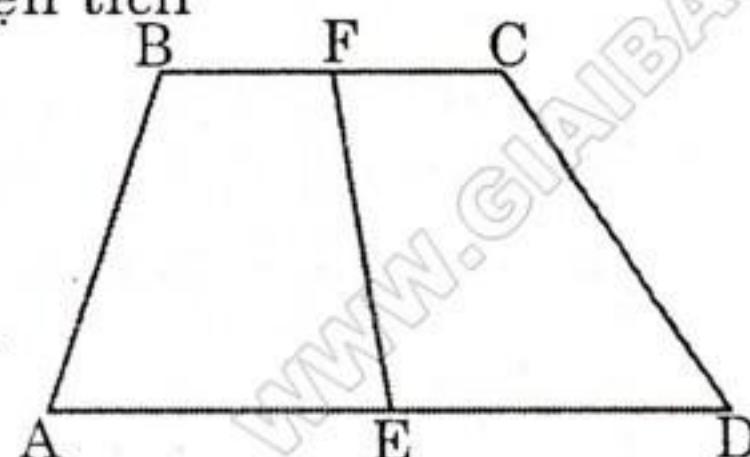
thang, tại sao ta được hai hình thang có diện tích bằng nhau?

**Hướng dẫn:**

Cho hình thang ABCD, gọi E, F

lần lượt là trung điểm của hai đáy AD, BC.

Gọi h là độ dài đường cao của ABCD.

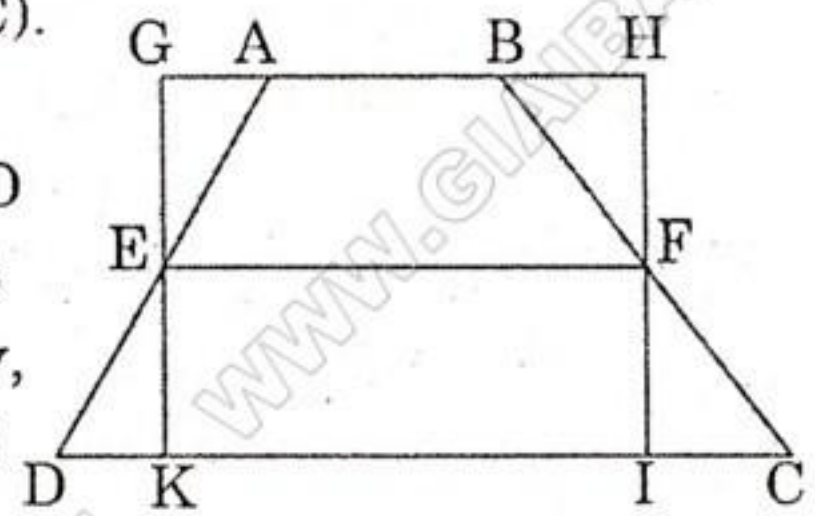




$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{ABFE} &= \frac{1}{2}(AE + BF).h = \frac{1}{2}(ED + FC).h \\ &= S_{CDEF} \text{ (vì } AE = ED, BF = FC). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } S_{ABFE} = S_{CDEF}.$$

**Bài 30:** Trên hình bên ta có hình thang ABCD với đường trung bình EF và hình chữ nhật GHIK. Hãy so sánh diện tích hai hình này, từ đó suy ra một cách chứng minh khác về công thức diện tích hình thang.



**Hướng dẫn:**

\* Vì EF là đường trung bình của hình thang ABCD

$$\text{nên } EF = \frac{1}{2}(AB + CD).$$

$$\text{Khi đó: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).GK = EF.GK = GH.GK = S_{GHIK}.$$

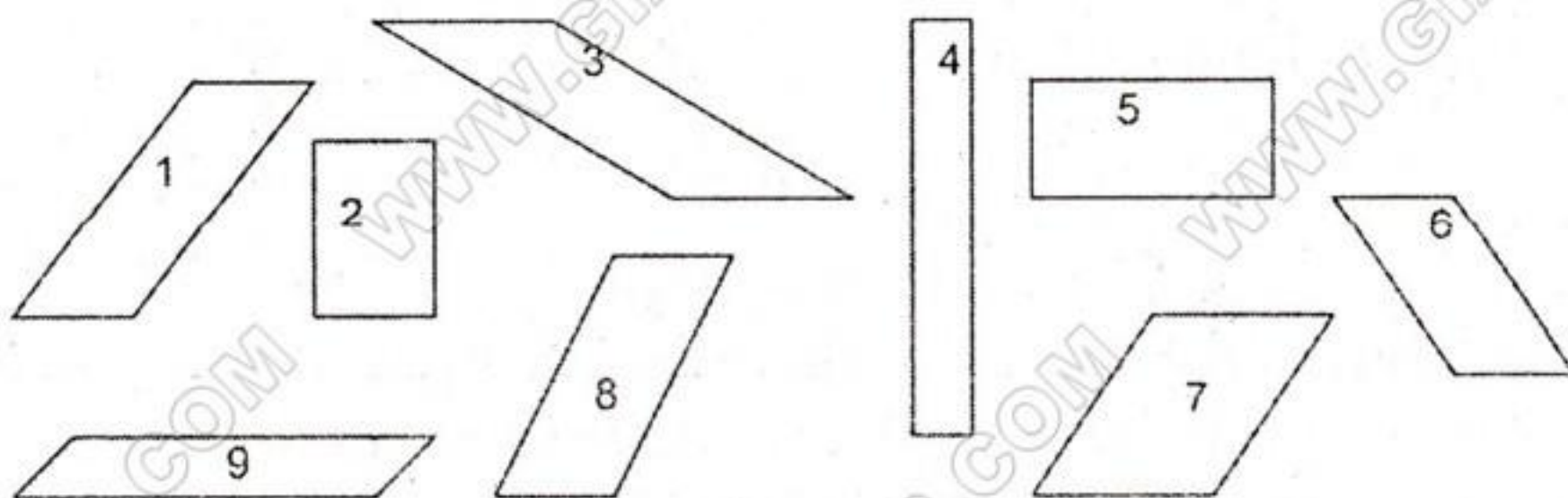
\* Ta có thể chứng minh công thức tính diện tích hình thang ABCD bằng cách dựng hình chữ nhật GHIK như trong hình vẽ (có một cạnh bằng chiều cao và một cạnh bằng đường trung bình của hình thang).

Ta có:  $\triangle DEK = \triangle AEG$  và  $\triangle CIF = \triangle BHF$  (cạnh góc vuông – góc nhọn)

$$\Rightarrow S_{DEK} = S_{AEG}, S_{CIF} = S_{BHF}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } S_{ABCD} &= S_{DEK} + S_{EABF} + S_{EFIK} + S_{CIF} = S_{AEG} + S_{EABF} + S_{EFIK} + S_{BHF} \\ &= S_{GHIK} = GH.GK = EF.GK = \frac{1}{2}(AB + CD).GK. \end{aligned}$$

**Bài 31:** Xem hình dưới. Hãy chỉ ra các hình có cùng diện tích (lấy ô vuông làm đơn vị diện tích).



**Hướng dẫn:**

\* Các hình: 1, 5, 8 có cùng diện tích (bằng 8 ô vuông).

\* Các hình: 2, 6, 9 có cùng diện tích (bằng 6 ô vuông):

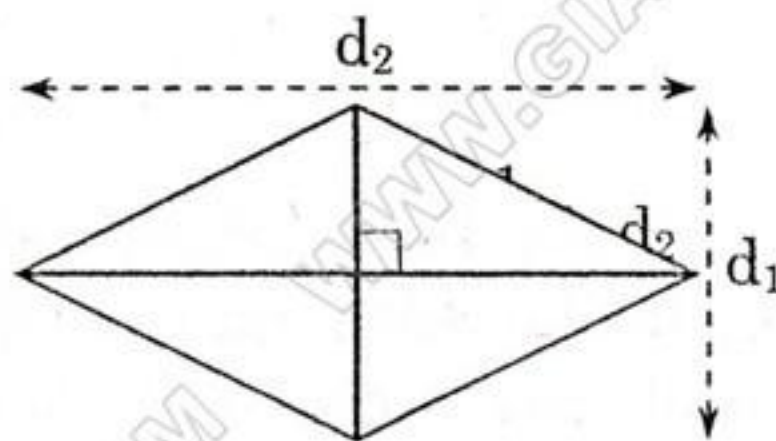
\* Các hình: 3, 7 có cùng diện tích (bằng 9 ô vuông).



## §5. DIỆN TÍCH HÌNH THOI

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo:



### B. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

**Bài 32:** a) Hãy vẽ một tứ giác có độ dài hai đường chéo là: 3,6cm; 6cm và hai đường chéo đó vuông góc với nhau. Có thể vẽ được bao nhiêu tứ giác như vậy? Hãy tính diện tích mỗi tứ giác vừa vẽ.

b) Hãy tính diện tích hình vuông có độ dài đường chéo là  $d$ .

**Hướng dẫn:**

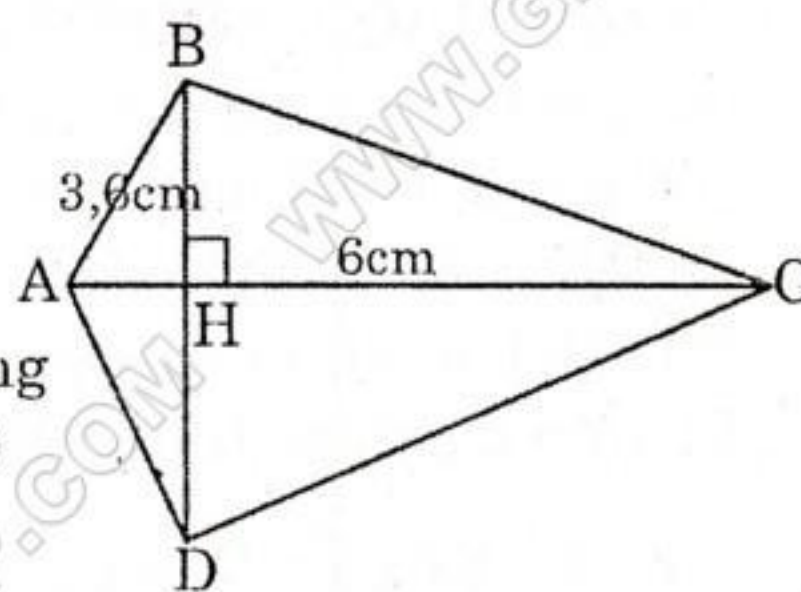
a) \* Vẽ tứ giác:

– Vẽ đoạn thẳng  $AC = 6\text{cm}$ .

– Từ một điểm  $H$  nằm giữa  $A$  và  $C$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $AC$ . Trên đường thẳng này lấy hai điểm  $B, D$  sao cho  $B, D$  thuộc hai nửa mặt phẳng bờ  $AC$  và  $BD = 3,6\text{cm}$ .

Tứ giác  $ABCD$  là tứ giác cần vẽ.

Ta có vô số tứ giác như trên.



$$* S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot BH + \frac{1}{2} AC \cdot DH = \frac{1}{2} AC \cdot (BH + DH)$$

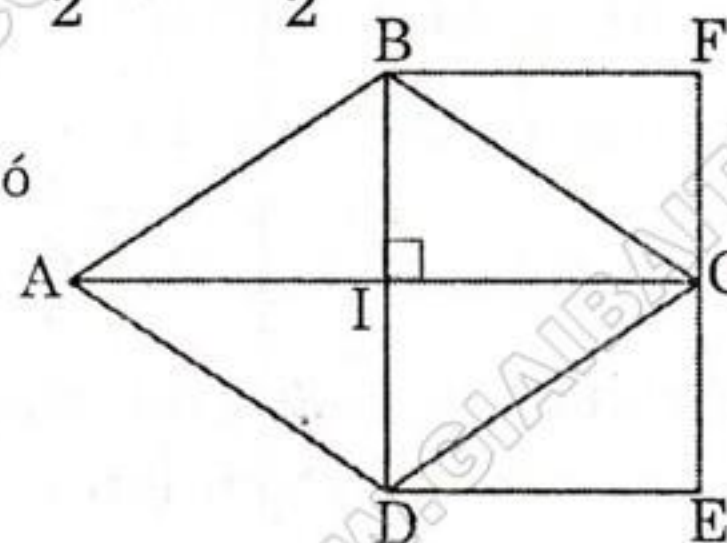
$$= \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3,6 = 10,8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Hình vuông là tứ giác có hai đường chéo vuông góc nên diện tích hình vuông có độ dài đường chéo là  $d$  là:  $S = \frac{1}{2} d \cdot d = \frac{1}{2} d^2$ .

**Bài 33:** Vẽ hình chữ nhật có một cạnh bằng đường chéo của một hình thoi cho trước và có diện tích bằng diện tích của hình thoi đó. Từ đó suy ra cách tính diện tích hình thoi.

**Hướng dẫn:**

Cho hình thoi  $ABCD$ , hai đường chéo cắt nhau tại  $I$ . Ta vẽ hình chữ nhật  $BDEF$  có  $BF = IC$  (như hình bên).





Khi đó:  $\triangle BCF = \triangle ABI$ ,  $\triangle CDE = \triangle DIA$  (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow S_{BCF} = S_{ABI}, S_{CDE} = S_{DIA}.$$

Ta có:  $S_{BDEF} = S_{BCD} + S_{BCF} + S_{CDE} = S_{BCD} + S_{ABI} + S_{DIA} = S_{ABCD}.$

$$\begin{aligned} * \text{ Cách tính diện tích hình thoi: } S_{ABCD} &= S_{BDEF} = BD \cdot DE = BD \cdot IC \\ &= BD \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AC \cdot BD. \end{aligned}$$

Vậy diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo.

**Bài 34:** Cho một hình chữ nhật. Vẽ tứ giác có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật. Vì sao tứ giác này là một hình thoi? So sánh diện tích hình thoi và diện tích hình chữ nhật, từ đó suy ra cách tính diện tích hình thoi.

**Hướng dẫn:**

Cho hình chữ nhật ABCD; M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

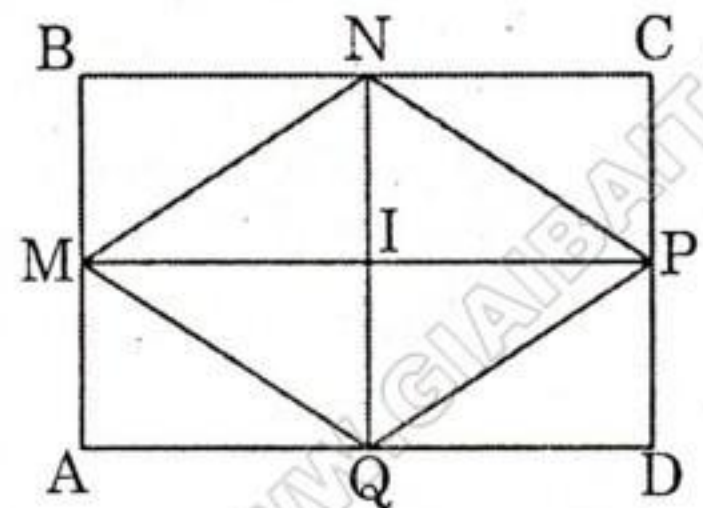
\* Chứng minh: MNPQ là hình thoi.

Ta có:  $\triangle MAQ = \triangle MBN = \triangle PCN = \triangle PDQ$  (vì đều là các tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng một nửa các kích thước của hình chữ nhật ABCD)  
 $\Rightarrow MN = NP = PQ = QM \Rightarrow$  MNPQ là hình thoi.

\* Theo bài 33, ta có:  $S_{MNPQ} = S_{ABNQ}$  và  $S_{MNPQ} = S_{NQDC}.$

Vì vậy:  $S_{ABCD} = S_{ABNQ} + S_{NQDC} = 2S_{MNPQ}.$

$$* \text{ Ta có: } S_{ABCD} = 2S_{MNPQ} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} NQ \cdot MP.$$



**Bài 35:** Tính diện tích hình thoi có cạnh dài 6cm và một trong các góc của nó có số đo là  $60^\circ$ .

**Hướng dẫn:**

+ ABCD là hình thoi  $\Rightarrow \triangle BAD$

cân tại A. Mà  $\hat{A} = 60^\circ$  nên  $\triangle ABD$  là tam giác đều  $\Rightarrow BD = AB = 6\text{cm}.$

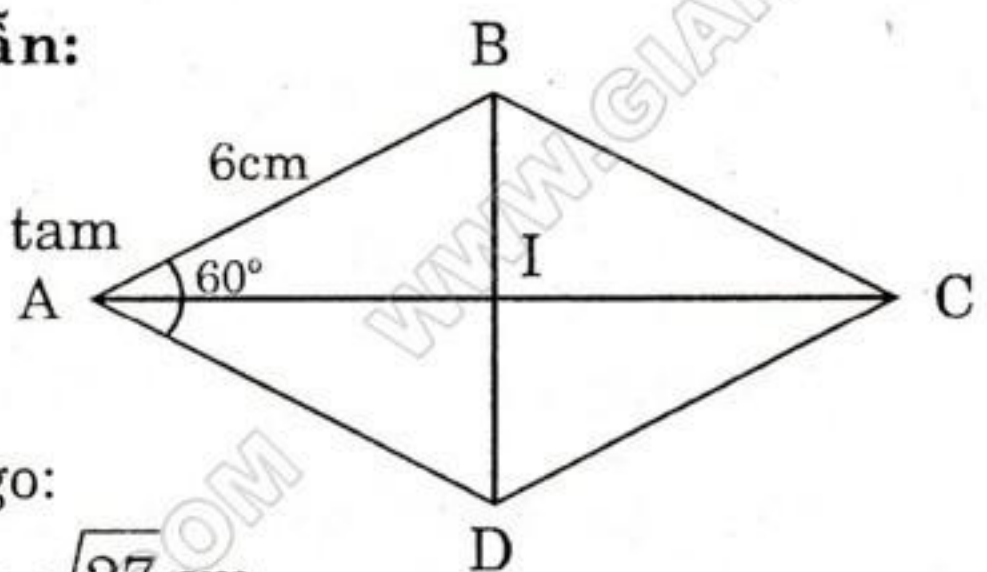
+  $AC \perp BD$  và  $BI = ID = 3\text{cm}$

Trong tam giác vuông AIB theo Pitago:

$$AI^2 = AB^2 - IB^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow AI = \sqrt{27} \text{ cm}$$

$$\text{Suy ra: } AC = 2AI = 2\sqrt{27} \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{27} \cdot 6 = 12\sqrt{27} \text{ (cm}^2\text{)}$$



**Bài 36:** Cho một hình thoi và một hình vuông có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn? Vì sao?

**Hướng dẫn:**



Với một hình thoi và một hình vuông có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn hơn. Vì hai hình này có chu vi bằng nhau nên mỗi cạnh của nó bằng nhau, giả sử là  $a$ .

\* Diện tích hình vuông là  $a^2$ .

\* Trong hình thoi gọi  $d_1, d_2$  là độ dài các đường chéo, ta có:

+ Diện tích hình thoi là  $\frac{1}{2}d_1d_2$ .

$$+ a^2 = \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = \frac{1}{4}(d_1^2 + d_2^2) = \frac{1}{4}[(d_1 - d_2)^2 + 2d_1d_2] =$$

$$= \frac{1}{4}(d_1 - d_2)^2 + \frac{1}{2}d_1d_2 \geq \frac{1}{2}d_1d_2 \text{ (vì } \frac{1}{4}(d_1 - d_2)^2 \geq 0).$$

Vậy  $a^2 \geq \frac{1}{2}d_1d_2$ .

## §4. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

Để tính diện tích một đa giác ta:

- Phân chia đa giác thành nhiều đa giác đơn giản, tam giác, hình thang, hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông.
- Tính diện tích của mỗi hình đó.
- Diện tích đa giác là tổng diện tích các hình trên.

### B. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

**Bài 37:** Thực hiện các phép đo cần thiết (chính xác đến mm) để tính diện tích hình ABCDE (hình bên).

**Hướng dẫn:**

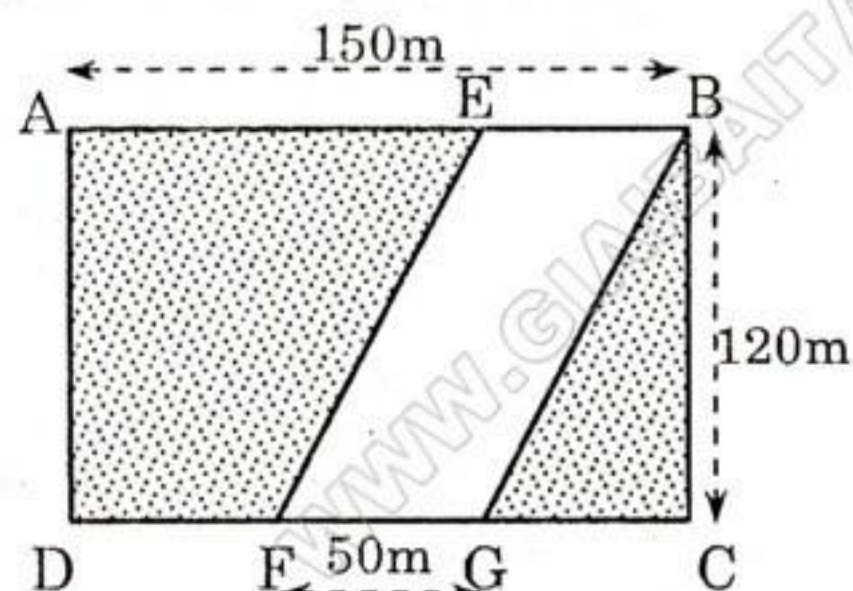
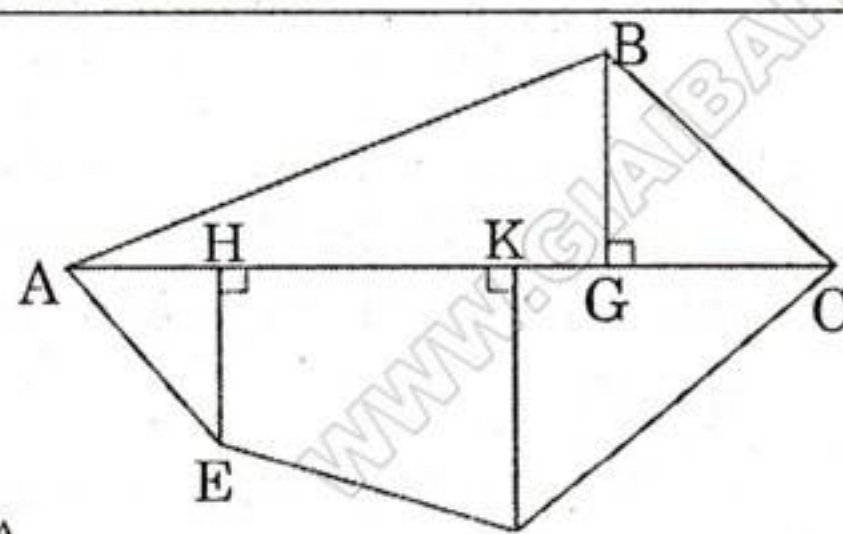
Ta có:  $S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{CDK} + S_{DKHE} + S_{HEA}$

$$= \frac{1}{2}AC.BG + \frac{1}{2}CK.DK + \frac{1}{2}(KD + HE).HK + \frac{1}{2}HE.AH.$$

Vậy ta cần đo các đoạn thẳng: AC, BG, CK, DK, HE, AH.

(Bạn đọc hãy đo và tính)

**Bài 38:** Một con đường cắt một đám đất hình chữ nhật với các dữ kiện được cho trên hình bên. Hãy tính diện tích phần con đường EBGF ( $EF \parallel BG$ ) và diện tích phần còn lại của đám đất.





### Hướng dẫn:

+ Diện tích con đường hình bình hành EBGF là:

$$S_{EBGF} = 50 \times 120 = 6000 \text{ (m}^2\text{)}$$

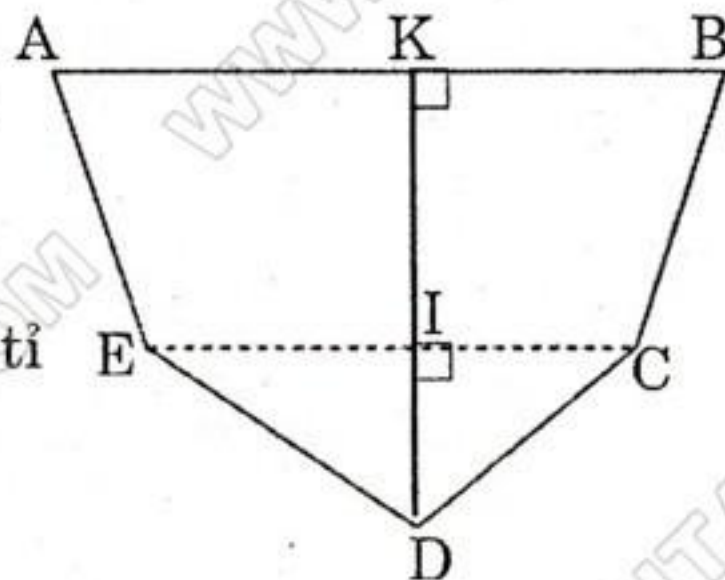
+ Diện tích đám đất hình chữ nhật ABCD là:

$$S_{ABCD} = 150 \times 120 = 18000 \text{ (m}^2\text{)}$$

+ Diện tích phần còn lại của đám đất là:

$$18000 - 6000 = 12000 \text{ (m}^2\text{)}$$

**Bài 39:** Thực hiện các phép vẽ và đo cần thiết để tính diện tích một đám đất có dạng như hình bên, trong đó  $AB \parallel CE$  và được vẽ với tỉ lệ  $\frac{1}{5000}$ .



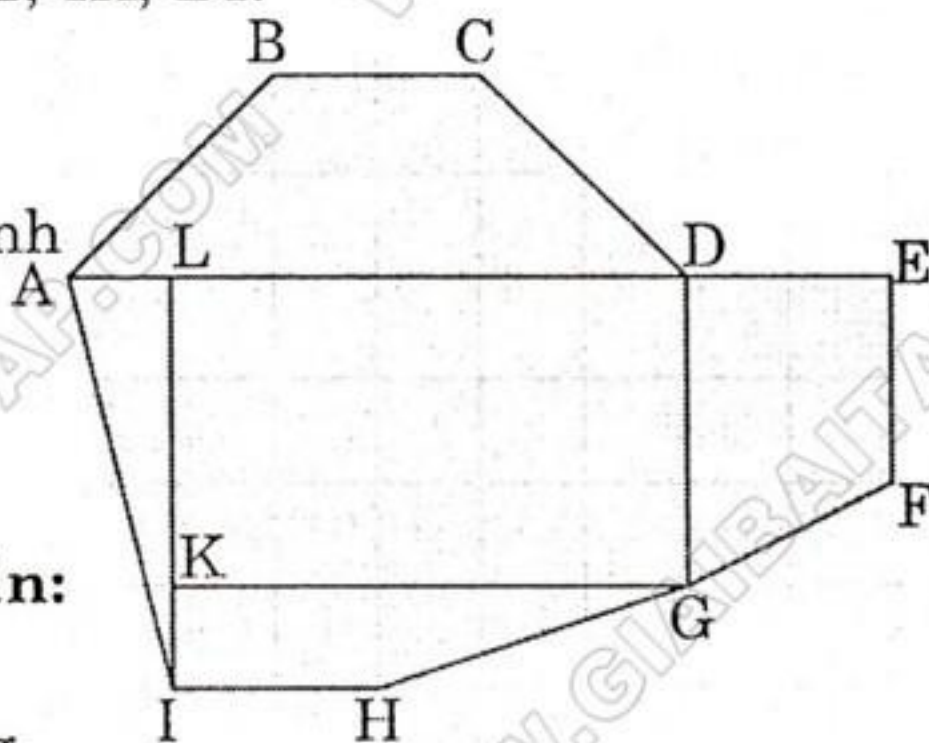
### Hướng dẫn:

Kẻ DK vuông góc với AB (K thuộc AB), cắt EC tại I. Ta có:

$$S_{ABCDE} = S_{ABCE} + S_{CED} = \frac{1}{2}(AB + CE) \cdot IK + \frac{1}{2}CE \cdot DI.$$

Vậy ta cần đo các đoạn thẳng: AB, CE, IK, DI.

**Bài 40:** Tính diện tích thực của một hồ nước có sơ đồ là phần tô đậm trên hình bên (cạnh của mỗi ô vuông là 1cm), tỉ lệ  $\frac{1}{10000}$ .





## ÔN TẬP CHƯƠNG II

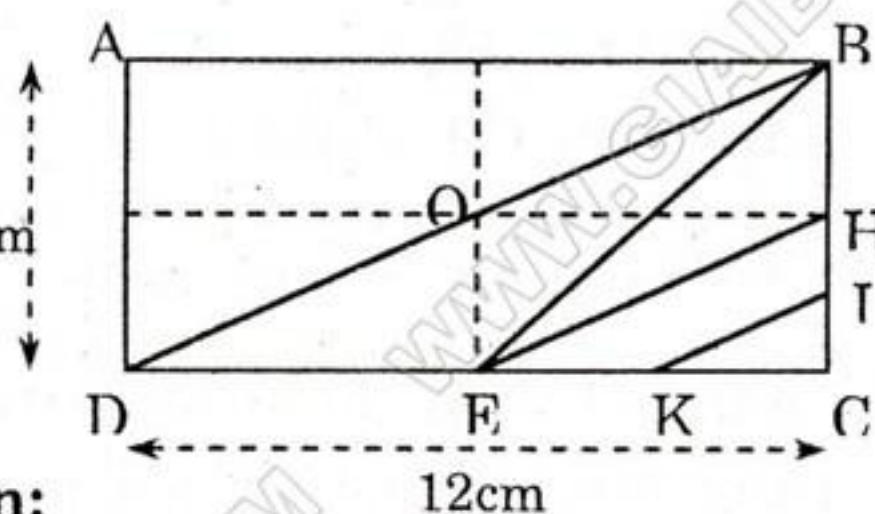
### HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP.

**Bài 41:** Cho hình chữ nhật ABCD.

Gọi H, I, E, K lần lượt là các trung điểm của BC, HC, DC, EC (hình bên).

Tính: a) Diện tích tam giác DBE. 6,8cm

b) Diện tích tứ giác EHIK.



**Hướng dẫn:**

a) Ta có:  $S_{DBE} = \frac{1}{2} DE \cdot BC$

+ Vì E là trung điểm của DC nên  $DE = \frac{1}{2} DC$ .

+ Khi đó:  $S_{DBE} = \frac{1}{4} DC \cdot BC = \frac{1}{4} \cdot 12 \cdot 6,8 = 20,4 \text{ (cm}^2\text{)}$

b) Ta có:  $S_{EHIK} = S_{EHC} - S_{KIC}$

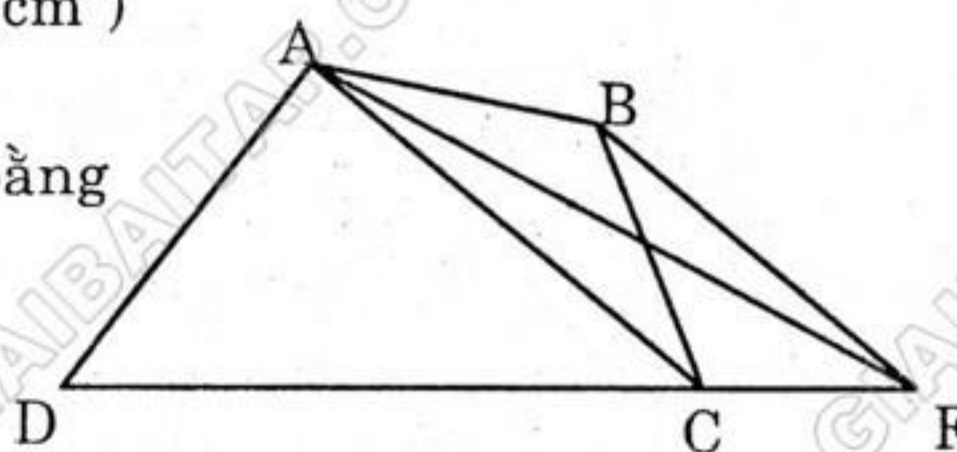
+  $S_{EHC} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot HC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} DC \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3,4 = 10,2 \text{ (cm}^2\text{)}$

+  $S_{KIC} = \frac{1}{2} KC \cdot IC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} EC \cdot \frac{1}{2} CH = \frac{1}{8} EC \cdot HC = \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 3,4 = 2,55 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

Vậy:  $S_{EHIK} = 10,2 - 2,55 = 7,65 \text{ (cm}^2\text{)}$

**Bài 42:** Trên hình bên ( $AC \parallel BF$ ),

hãy tìm tam giác có diện tích bằng diện tích của tứ giác ABCD.



**Hướng dẫn:**

Ta có:

+  $S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC}$

+  $S_{ADF} = S_{ADC} + S_{ACF}$

+ Vì  $BF \parallel AC$  nên  $S_{ABC} = S_{ACF}$  (vì chung đáy AC và các đường cao vẽ từ B và F bằng nhau)

Vậy  $S_{ADF} = S_{ADC} + S_{ACF} = S_{ADC} + S_{ABC} = S_{ABCD}$ .

**Bài 43:** Cho hình vuông ABCD có tâm đối xứng O,

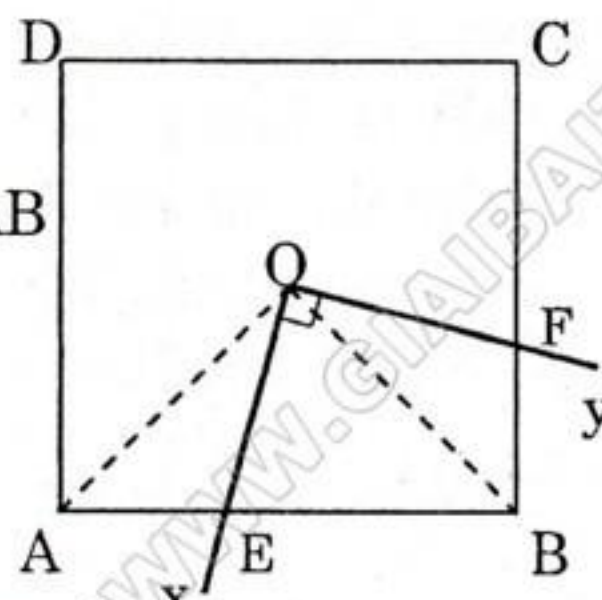
cạnh a. Một góc vuông xOy có tia Ox cắt cạnh AB tại E, tia Oy cắt cạnh BC tại F (hình bên).

Tính diện tích tứ giác OEBF.

**Hướng dẫn:**

\* Xét  $\triangle AOE$  và  $\triangle BOF$  có:

+  $OA = OB$  (do ABCD là hình vuông tâm đối xứng O)





$$+ \widehat{AOE} + \widehat{EOB} = 90^\circ; \widehat{BOF} + \widehat{EOB} = \widehat{xOy} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{BOF}.$$

$$+ \widehat{EAO} = 45^\circ \text{ và } \widehat{FBO} = 45^\circ \text{ (vì } ABCD \text{ là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{FBO}.$$

$$\text{Suy ra: } \triangle AOE = \triangle BOF \text{ (g.c.g)} \Rightarrow S_{AOE} = S_{BOF}$$

$$* \text{ Ta có: } S_{OEBF} = S_{OEB} + S_{BOF} = S_{OEB} + S_{AOE} = S_{AOB} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} a^2.$$

**Bài 44:** Gọi  $O$  là điểm nằm trong hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng tổng diện tích của hai tam giác  $ABO$  và  $CDO$  bằng tổng diện tích của hai tam giác  $BCO$  và  $DAO$ .

**Hướng dẫn:**

Qua  $O$  vẽ  $OH \perp AB$  và  $OK \perp AD \Rightarrow OH \perp DC, OK \perp BC$ .

Gọi  $I, L$  lần lượt là giao điểm của  $OK, OH$

với  $DC, BC$ . Ta có:

$$+ S_{ABCD} = AB.IH = BC.KL$$

$$+ S_{ABO} = \frac{1}{2} AB.OH \text{ và } S_{CDO} = \frac{1}{2} DC.OI$$

$$\Rightarrow S_{ABO} + S_{CDO} = \frac{1}{2} AB.OH + \frac{1}{2} DC.OI = \frac{1}{2} AB.OH + \frac{1}{2} AB.OI$$

$$= \frac{1}{2} AB(OH + OI) = \frac{1}{2} AB.IH = \frac{1}{2} S_{ABCD} \quad (1)$$

$$+ S_{BCO} = \frac{1}{2} BC.OL \text{ và } S_{DAO} = \frac{1}{2} AD.OK$$

$$\Rightarrow S_{BCO} + S_{DAO} = \frac{1}{2} BC.OL + \frac{1}{2} AD.OK = \frac{1}{2} BC.OL + \frac{1}{2} BC.OK$$

$$= \frac{1}{2} BC(OL + OK) = \frac{1}{2} BC.KL = \frac{1}{2} S_{ABCD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:  $S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO}$ .

**Bài 45:** Hai cạnh của một hình bình hành có độ dài là 6cm và 4cm. Một trong các đường cao có độ dài là 5cm. Tính độ dài đường cao kia.

**Hướng dẫn:**

Xét hình bình hành  $ABCD$  có:

$$AB = 6\text{cm}, AD = 4\text{cm}, AH = 5\text{cm}$$

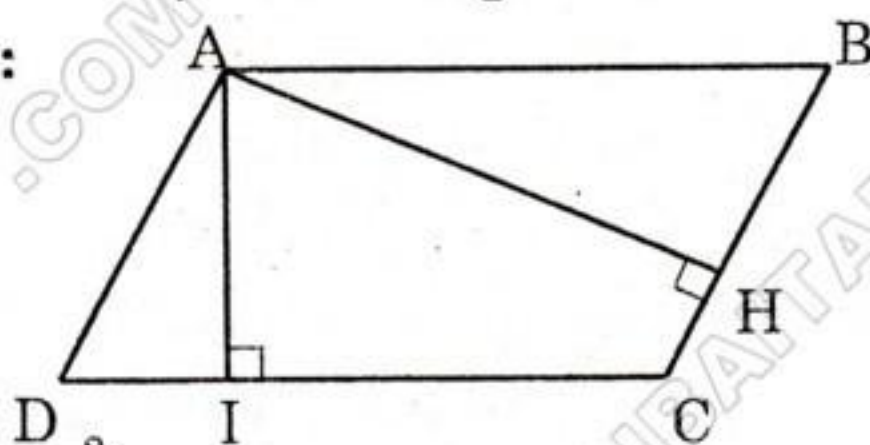
( $AH$  là đường cao).

Tính đường cao  $AI = ?$

$$+ S_{ABCD} = AH.BC = AH.AD = 5.4 = 20 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$+ S_{ABCD} = AI.DC = AI.AB = AI.6$$

$$\text{Suy ra: } AI.6 = 20 \Rightarrow AI = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \text{ (cm).}$$



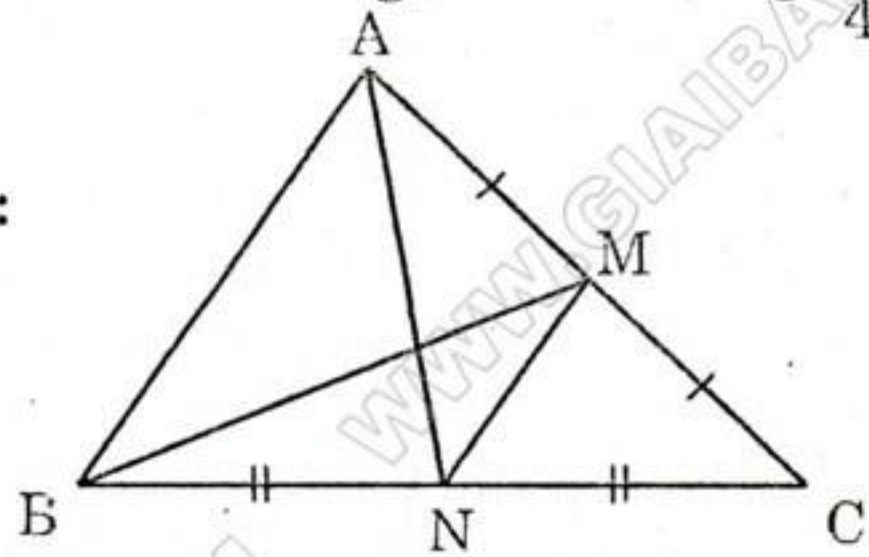


**Bài 46:** Cho tam giác ABC. Gọi M, N là các trung điểm tương ứng của AC, BC. Chứng minh rằng diện tích của hình thang ABNM bằng  $\frac{3}{4}$  diện tích của tam giác ABC.

**Hướng dẫn:**

Ta có hình vẽ bên.

Ta cần chứng minh  $S_{ABNM} = \frac{3}{4} S_{ABC}$ .



$$+ AM = \frac{1}{2} AC \text{ (gt)} \Rightarrow S_{ABM} = S_{BMC} = \frac{1}{2} S_{ABC} \text{ (1)}$$

$$+ BN = NC \text{ (gt)} \Rightarrow S_{BMN} = S_{MNC}. \text{ Khi đó:}$$

$$S_{BMC} = S_{BMN} + S_{MNC} = 2 \cdot S_{BMN}$$

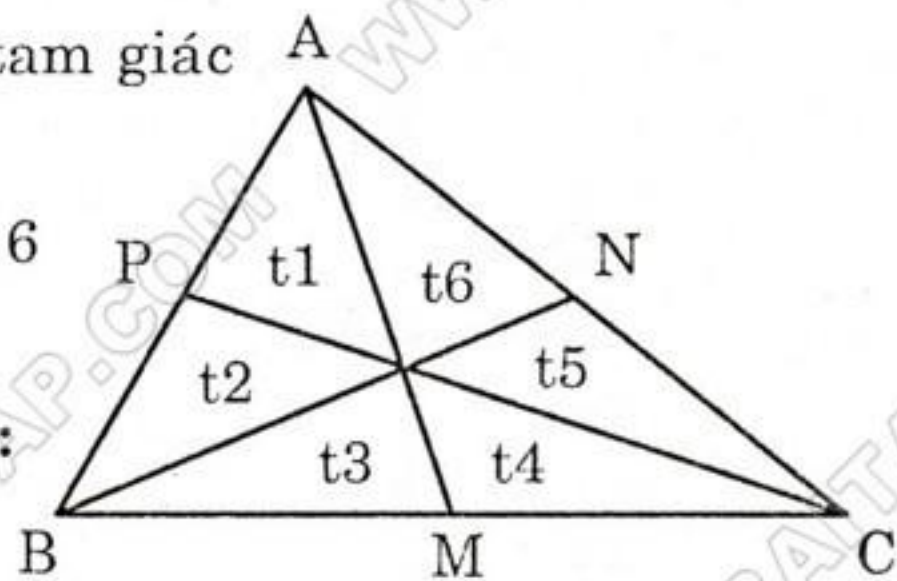
$$\Rightarrow S_{BMN} = \frac{1}{2} S_{BMC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC} \text{ (2).}$$

$$\text{Từ (1) và (2): } S_{ABNM} = S_{ABM} + S_{BMN} = \frac{1}{2} S_{ABC} + \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{3}{4} S_{ABC}.$$

**Bài 47:** Vẽ ba đường trung tuyến của một tam giác (hình bên).

Chứng minh sáu tam giác: 1, 2, 3, 4, 5, 6 có diện tích bằng nhau.

**Hướng dẫn:**



Gọi diện tích các tam giác theo thứ tự là  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ .

Ta có:

$$+ AP = BP \Rightarrow S_1 = S_2 \text{ (cùng đường cao và đáy bằng nhau) (1)}$$

$$+ BM = MC \Rightarrow S_3 = S_4 \text{ (cùng đường cao và đáy bằng nhau) (2)}$$

$$+ CN = NA \Rightarrow S_5 = S_6 \text{ (cùng đường cao và đáy bằng nhau) (3)}$$

$$* S_1 + S_3 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6 = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

$$\text{Kết hợp với (1), (2), (3) ta có: } 2S_1 + S_3 = S_4 + 2S_6 \Rightarrow S_1 = S_6$$

$$\text{Vậy: } S_1 = S_2 = S_5 = S_6 \text{ (5).}$$

$$* S_2 + S_1 + S_6 = S_3 + S_4 + S_5 = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

$$\text{Kết hợp với (1), (2), (3) ta có: } 2S_1 + S_6 = 2S_3 + S_5 \Rightarrow S_1 = S_3$$

$$\text{Vậy: } S_1 = S_3 = S_4 \text{ (6)}$$

$$\text{Từ (5) và (6) ta có: } S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$$